COGNOME E NOME: | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 17/2/2014. Parte A

1. Si consideri a funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x^4 - y^4)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si dica se f è continua in $(0,0)$ (2p.):

IN COORDINATE POLARI $f(\rho,\theta) = \rho^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = \rho^2 \cos(2\theta)$. DUNQUE $|f(\rho,\theta)| \leq \rho^2$ e quindi

$$\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\right| \leq \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0 \Rightarrow f \text{ è continua}$$

(b) Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$ (2p.):

Notiamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^3 = 0$ e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} y^3 = 0$. Se $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3(x^2+y^2) - (x^4-y^4)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Mostriamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Passando a coord. pol. $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\rho,\theta)\right| = |\rho(2\cos^5(\theta) + 4\cos^3(\theta)\sin^2\theta + 2\cos(\theta)\sin^4(\theta)| \leq 8\rho$ che tende a zero se $\rho\to 0$. Dunque $\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua in $(0,0)$. Analogo discorso per $\frac{\partial f}{\partial x}$ (x e y sono simmetrici!). DUNQUE f è differenziabile in $(0,0)$ e $df(0,0) = 0$

2. Si consideri la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) := (2\cos(t), 2\sin(t), t^2)$.

(a) Si mostri che il punto $P = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi^2}{16}\right)$ appartiene alla curva (1p.):

Se $t = \frac{\pi}{4}$ $\quad \gamma(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi^2}{16}\right) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi^2}{16}\right) = P$

dunque $P = \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Dunque P è sulla curva.

(b) si trovi il vettore tangente a γ nel punto P (1p.):

Si ha $\gamma'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 2t) \Rightarrow$

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$

(c) si calcoli $\displaystyle\int_\gamma \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (2p.):

Notiamo che la forma differenziale ω che compare nell'integrando ha come potenziale $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, come si verifica facilmente.

Allora $\int_\gamma \omega = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(1)) = F(2, 0, 4\pi^2) - F(2,0,0)$

$$= \sqrt{2^2 + 4^2\pi^2} - \sqrt{2^2} = \boxed{2\left(\sqrt{1+4\pi^2} - 1\right)}$$

(d) si calcoli la lunghezza di γ (2p.):

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 4t^2}\,dt =$$

$2\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt$. Ponendo $t = \sinh(s)$ e $\bar{s} = \operatorname{arcsinh}(2\pi)$

si passa a $2\int_0^{\bar{s}} \sqrt{1+\sinh^2(s)}\cosh(s)\,ds = 2\int_0^{\bar{s}} \cosh^2(s)\,ds =$

$$\int_0^{\bar{s}} (\cosh(2s)+1)\,ds = \frac{\sinh(2\bar{s})}{2} + \bar{s} = \sinh(\bar{s})\cosh(\bar{s}) + \bar{s}$$

$$= \sinh(\bar{s})\sqrt{1+\sinh^2(\bar{s})} + \bar{s} = \boxed{2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \operatorname{arcsinh}(2\pi)}$$

3. Sia data la funzione di due variabili:

$$f(x,y) := y^2 + \frac{16}{\sqrt{1+y^2-x^2}}. \qquad = y^2 + 16(1+y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

(a) Si trovino tutti i punti critici di f (1p.):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{16}{2}(1+y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{16x}{(1+y^2-x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{16}{2}(1+y^2-x^2)^{-3/2}(2y) = 2y - \frac{16y}{(1+y^2-x^2)^{3/2}}$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ si ricava $\underline{x=0}$. Dunque, da $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow$

$$2y = \frac{16y}{(1+y^2)^{3/2}} \Leftrightarrow y = 0 \text{ OPPURE } (1+y^2)^{3/2} = 8$$

LA SECONDA È EQUIVALE A $1+y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ PTI CRIT. $\boxed{(0,0), \; (0, \pm\sqrt{3})}$

(b) per ognuno dei punti sopra, si dica se sono di massimi relativi, minimi relativi o selle (2p.):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 16(1+y^2-x^2)^{-3/2} + 16\left(-\frac{3}{2}\right)x(1+y^2-x^2)^{-5/2}(-2x) =$$

$$16(1+y^2-x^2)^{-5/2}(1+y^2-x^2+3x^2) = \frac{16(1+y^2+2x^2)}{(1+y^2-x^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - 16(1+y^2-x^2)^{-3/2} - 16\left(-\frac{3}{2}\right)y(1+y^2-x^2)^{-5/2}(2y) =$$

$$2 - 16(1+y^2-x^2)^{-5/2}(1-2y^2-x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 16x\left(-\frac{3}{2}\right)(1+y^2-x^2)^{-5/2} 2y = -48xy(1+y^2-x^2)^{-5/2}$$

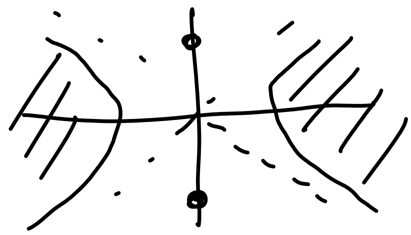
$\Rightarrow J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J_f(0,0)) < 0$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ PTO DI SELLA

$\Rightarrow J_f(0,\pm\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9/2 \end{pmatrix}$. DUE AUTOVALORI > 0

$\Rightarrow$ $(0,\pm\sqrt{3})$ SONO MINIMI REL.

(c) si trovino l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f sul dominio di f dicendo anche se sono minimi/massimi (2p.):



IL DOMINIO È $D := \{ 1+y^2 > x^2 \}$

$\partial D = \{ 1+y^2 = x^2 \}$ e chiaramente

se $(x_0,y_0) \in \partial D \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Se invece $x_n^2 + y_n^2 \to +\infty$, con $(x_n,y_n) \in D$ allora

$y_n^2 > 1 + x_n^2 \Rightarrow 2y_n^2 \geq 1 + x_n^2 + y_n^2 \Rightarrow y_n^2 \to +\infty$. Ne segue

$f(x_n,y_n) \geq y_n^2 \to +\infty$. Per le conseguenze di Weierstrass

f HA MINIMO $\Rightarrow \inf_D f = \min_D f = f(0,\sqrt{3}) = 11$

MENTRE OVVIAMENTE $\sup_D f = +\infty$

COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 17/2/2014. Parte B

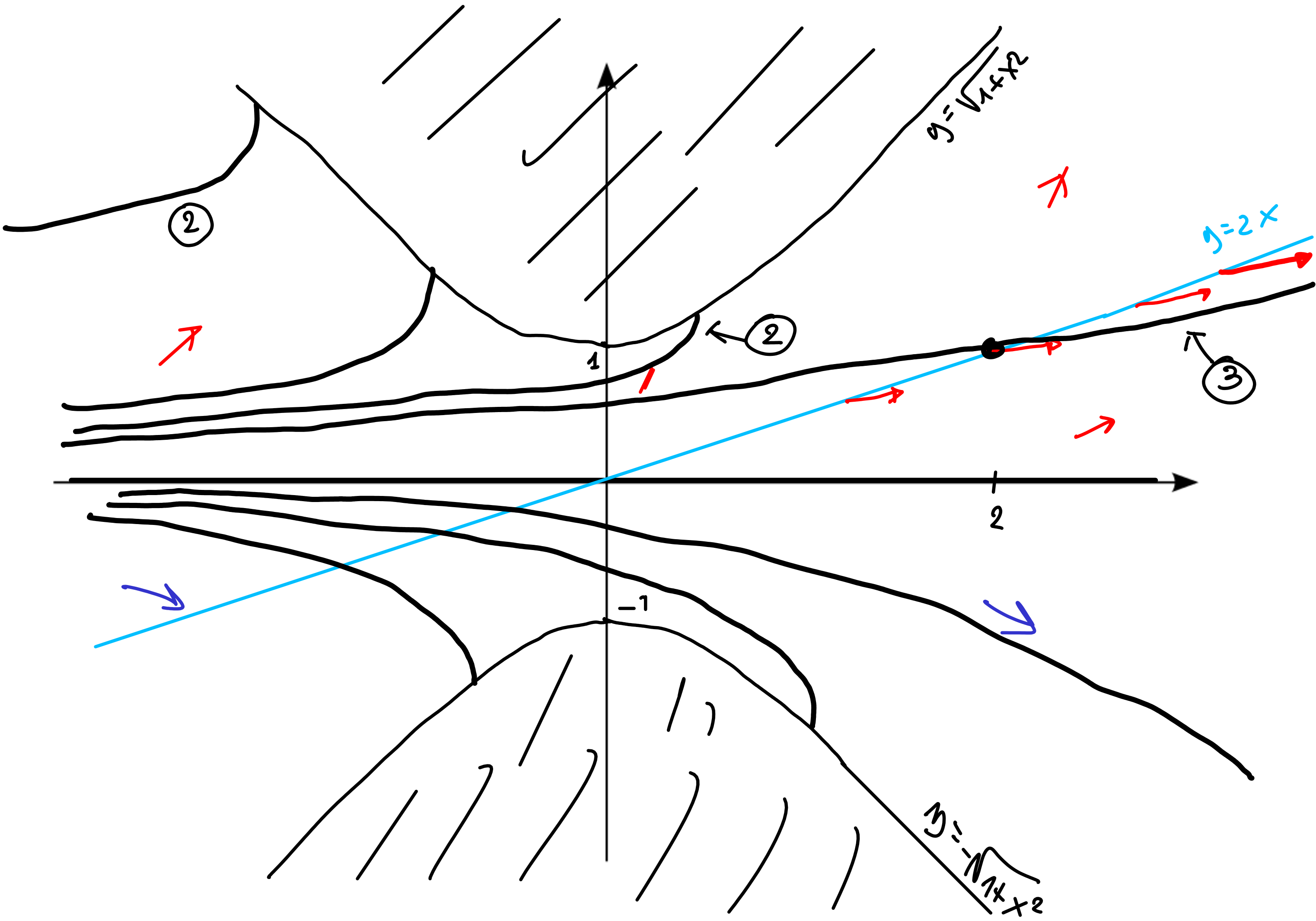
1. Si consideri il problema differenziale:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2\sqrt{1+x^2-y^2}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) di $\mathbb{R}^2$ vale il teorema di esistenza locale (1p.); si trovino inoltre le zone di crescenza e decrescenza delle soluzioni (1p.) e si riportino queste informazione nel piano cartesiano schematizzato di seguito:

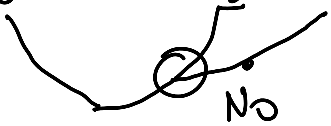
CHIAMIAMO $F(x,y) = \dfrac{y}{2\sqrt{1+x^2-y^2}}$. Il teor. d. esistenza vale dove esiste $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, cioè sul dominio di F che è $\{y^2 < 1+x^2\}$

Le sol. sono crescenti dove $F>0$, cioè per $y>0$ / decrescenti per $y<0$. $y=0$ è sol. costante



(b) Nel caso di (x_0, y_0) generico si trovi il tempo massimale di esistenza sinistro $\underline{x} < x_0$ e si dica a cosa tende la soluzione $y(x)$ quando $x \to \underline{x}^-$, disegnando una di queste curve nel piano cartesiano della pagine precedente (2p.):

Qualunque sia il punto iniziale (x_0, y_0) il tempo $\underline{x}$ è $-\infty$.
Prendiamo per esempio $y_0 > 0 \Rightarrow y(x)$ crescente. Se $x_0 \le 0$ è chiaro che $0 < y(x) < y_0$ $\forall x < x_0 \Rightarrow y(x)$ NON ESCE MAI DAL DOMINIO $\Rightarrow y(x)$ esiste $\forall x < x_0$. Se invece $x_0 > 0$ potrebbe a priori essere che $(x, y(x)) \to (\underline{x}, \underline{y})$ con $1 + \underline{x}^2 = \underline{y}^2$. Ma allora sarebbe $y'(x) \to +\infty$ per $x \to \underline{x}$



e questo non è possibile

(c) Si dica se ci sono dati iniziali per cui la soluzione ha un tempo massimale destro $\overline{x} > x_0$ finito. (2p.) e si disegni una di queste eventuali curve:

Se si prende (x_0, y_0) abbastanza vicino a $\mathcal{C} = \{1 + x^2 = y^2\}$ allora $y(x)$ va a finire su $\mathcal{C}$ con derivata $+\infty$

(vedi 2 in figura). O anche – PIÙ SEMPLICEMENTE –

se $x_0 < 0$ $y_0 > 1$ (e $1 + x_0^2 < y_0^2$) $\Rightarrow$ la soluzione essendo crescente deve finire su $\{1 + x^2 = y^2\}$ in un tempo finito $\bar{x} < 0$

(d) Se $x_0 = 2, y_0 = 1$ si trovi il tempo massimale destro $\overline{x} > x_0$ (suggerimento: si studi come partono le soluzioni con punto iniziale sulla retta $2y = x$) e si disegni questa curva (2p.):

Chiamiamo $r(x) = \frac{x}{2}$. Se calcoliamo $F(x, r(x))$ viene

$$\frac{x/2}{2\sqrt{1 + x^2 - x^2/4}} \le \frac{x/2}{2\sqrt{(1 - 1/4)\, x^2}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{2} = r'(x)$$

DUNQUE SE PARTO DA $(x_0, r(x_0))$ la soluzione entra nella regione $\{y < x/2\}$ (vedi 3). Dunque queste $y(x)$ non possono mai uscire da $\{y \le x/2\}$ $\Rightarrow$ il loro $\bar{x}$ vale $+\infty$

(in particolare se $x_0 = 2$, $y_0 = 1$)

2. Si calcoli l'integrale multiplo(6p.):

$$\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\,dxdydz, \quad \text{dove:} \quad D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \ge 1, z \ge 0\}$$

Passo in coord. polari: $x = \rho\cos\theta\sin\psi$, $y = \rho\sin\theta\sin\psi$

$z = \rho\cos\psi \Rightarrow dxdydz = \rho^2 \sin\psi \, d\rho\, d\theta\, d\psi$.

IL DOMINIO DIVENTA $D_1 = \{0 \le \rho \le 2,\ \rho^2\sin^2(\psi) \ge 1,\ \psi \le \frac{\pi}{2}, \theta.\} =$

$\{0 \le \theta \le 2\pi,\ \frac{\pi}{6} \le \psi \le \frac{\pi}{2} \quad \frac{1}{\sin(\psi)} \le \rho \le 2\}$. L'INTEGRALE $\to$

$$\int_{D_1} \rho^2 \sin\psi \frac{\rho\cos\psi}{\rho^2\sin^2\psi}\, d\rho\, d\theta\, d\psi = 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(\psi)}{\sin(\psi)} \int_{1/\sin(\psi)}^{2} \rho\, d\rho =$$

$$\frac{2\pi}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(\psi)}{\sin(\psi)} \left(4 - \frac{1}{\sin^2(\psi)}\right) d\psi = \left(t = \sin\psi \quad dt = \cos(\psi)d\psi\right)$$

$$\pi \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t}\left(4 - \frac{1}{t^2}\right) dt = \pi \left[4\ln(t) + \frac{1}{2t^2}\right]_{1/2}^{1} =$$

$$\boxed{\pi\left(4\ln(2) - \frac{3}{2}\right)}$$

NOTA CHE SI POTEVA ANCHE FARE MEDIANTE COORDINATE CILINDRICHE (più semplice ...) $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$, $z = z$

$dx\,dy\,dz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$ e D diventa $D_1 : \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le z \le \sqrt{4-\rho^2}\}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \frac{z}{\rho^2} \right) \rho\, d\rho = 2\pi \int_1^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \frac{d\rho}{\rho} =$$

$$\pi \int_1^2 \frac{4-\rho^2}{\rho} d\rho = \pi \left[4\ln(\rho) - \frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 = \pi\left(\ln(4) - 3/2\right)$$

3. Si consideri la serie di funzioni: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{ne^{nx}}$.

(a) Si trovi l'insieme I delle $x \geq 0$ per cui la serie converge puntualmente e si dimostri che la somma $S(x)$ della serie è continua su I (3p.):

Notiamo che, posto $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, allora g è la somma di una serie di potenze di raggio $R = \left(\lim_n \sqrt[n]{1/n}\right)^{-1} = 1$.

e $S(x) = x\, g(e^{-x})$. Dunque $S(x)$ converge se $|e^{-x}| < 1$, cioè $\forall x \geq 0$. Inoltre per le proprietà delle serie di potenze $g(z)$ è continua se $|z| < 1$

$\Rightarrow S(x)$ è continua se $|e^{-x}| < 1$, cioè è continua su $\{x \geq 0\}$

(b) si faccia vedere che $S(x)$ è derivabile in $\{x \in I : x > 0\}$ (2p.) e che vale (2p.) la formula:

$$S'(x) = \frac{S(x)}{x} - \frac{x}{e^x - 1} \qquad \forall x > 0.$$

Sempre per le proprietà delle serie di potenze, si ha che $g(z)$ è derivabile per $|z| < 1$ e $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n} =$

$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ ($\forall z$ con $|z| < 1$)

Allora $S(x) = x\, g(e^{-x})$ è derivabile per $x > 0$ e

$$S'(x) = g(e^{-x}) + x\, g'(e^{-x})(-e^{-x}) =$$

$$\frac{S(x)}{x} - \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{S(x)}{x} - \frac{x}{e^x - 1}$$

NOTA: Procedimento alternativo per (b):

poniamo $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{n} \Rightarrow f_n'(x) = \frac{e^{-nx}}{n} - x e^{-nx}$

Fissato $a>0$ si ha $\max_{x\geq a} |f_n'(x)| = f_n'(a)$

per n abbastanza grande (facendo lo studio di f_n' ...)

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge TOTALMENTE $\Rightarrow$ UNIF. su $[a,+\infty[$

• quindi S è derivabile su $[a,+\infty[$ e per ogni $x\geq a$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx} =$$

$$\frac{S(x)}{x} - x\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{S(x)}{x} - x\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right) =$$

$$\frac{S(x)}{x} - \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{S(x)}{x} - \frac{x}{e^x-1}$$