COGNOME E NOME: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 28/1/2014. Parte A

1. Data la funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e l'insieme $M \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$G(x,y) : e^{xy^2} + x, \qquad M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G(x,y) = 1\}$$

   (a) Si mostri che $(0,0) \in M$ e che vicino a $(0,0)$ M è il grafico di una funzione $x = g(y)$ (1p.):

   (b) Si si calcolino $g'(0)$ (2p) e $g''(0)$ (2p.):

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega := y\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}dx + x\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}dy$$

(a) Si dica se ω è chiusa (1p.):

(b) si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ percorre in verso antiorario il bordo del cerchio $E := \{(x,y) : x^2+y^2 = 4)\}$ (2p.):

(c) si dica se ω è esatta e in caso affermativo si calcoli un potenziale per ω (2p.):

3. Sia data la funzione di due variabili:

$$f(x, y) := e^{x^2+y^2} - 2exy.$$

(a) Si trovino tutti i punti critici di f (1p.):

(b) per ognuno dei punti trovati sopra, si dica se si tratta di massimi relativi, minimi relativi o selle (2p.):

(c) si trovino l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su $\mathbb{R}^2$ dicendo anche se sono minimi/massimi (2p.):

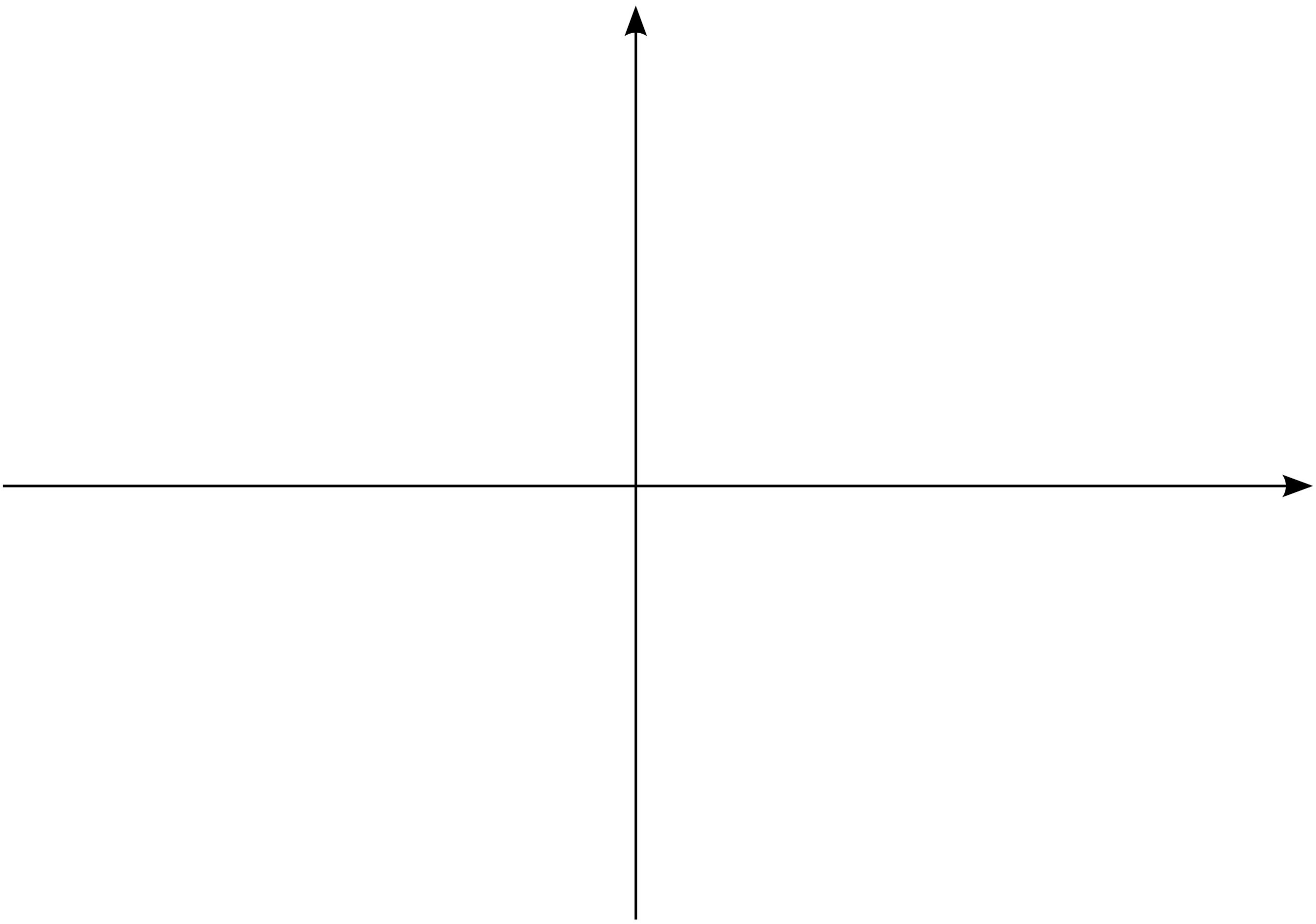
COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 28/1/2014. Parte B

1. Si consideri il problema differenziale:

$$\begin{cases} y' = \ln(x^2 - y^2 + 1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   (a) Si dica per quali (x_0, y_0) di $\mathbb{R}^2$ vale il teorema di esistenza locale (1p.); si trovino inoltre le zone di crescenza e decrescenza delle soluzioni (1p.) e si riportino queste informazione nel piano cartesiano schematizzato di seguito:



(b) Nel caso $x_0 = 0, y_0 = 0$ si trovi se i tempi massimali di esistenza $\underline{x} < x_0 < \overline{x}$ sono finiti o infiniti, a cosa tende la soluzione $y(x)$ quando $x \to \underline{x}^-$ e $x \to \overline{x}^-$ e si disegni $y(x)$ nel piano cartesiano della pagine precedente (2p.):

(c) Stessa domanda del punto (b) nel caso $x_0 = 1, y_0 = 0$ (3p.):

(d) Si dica se ci sono dati iniziali per cui la soluzione ha un tempo massimale destro finito. (2p.):

2. Si calcoli l'integrale improprio (6p.):

$$\iiint_D \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dxdydz, \quad \text{dove:} \quad D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, y \ge 0, x \ge 0, 0 \le z \le \sqrt{(}2)(x^2+y^2)\}$$

3. Si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx}$$

(a) Si trovi l'insieme I delle $x \geq 0$ per cui la serie converge puntualmente (1p.):

(b) detta $S(x)$ la somma della serie (per $x \in I$), si dimostri che S è continua su $\{x \in I : x \geq 1\}$ (2p.); si può analogamente dimostrare che S è continua in $\{x \in I : x > 0\}$? (2p.)

(c) si faccia vedere che, se $m > 0$ è intero, si ha $S(1/m) \geq \dfrac{1}{e}$; cosa se ne può dedurre sulla convergenza uniforme della serie su tutto I? (2p.)