COGNOME E NOME: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 28/1/2014. Parte A

1. Data la funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e l'insieme $M \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$G(x,y) : e^{xy^2} + x, \qquad M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G(x,y) = 1\}$$

(a) Si mostri che $(0,0) \in M$ e che vicino a $(0,0)$ $M$ è il grafico di una funzione $x = g(y)$ (1p.):

$G(0,0) = e^0 + 0 = 1 \Rightarrow (0,0) \in M$

$G_x(x,y) = y^2 e^{xy^2} + 1 \Rightarrow G_x(0,0) = 0 + 1 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ M è localmente grafico di una $x = g(y)$

$G_y(x,y) = 2xy\, e^{xy^2} \Rightarrow G_y(0,0) = 0$

(NON SERVE – MOSTRA CHE NON SI APPLICA DINI IN y)

(b) Si si calcolino $g'(0)$ (2p) e $g''(0)$ (2p.):

$$g'(y) = -\frac{G_y(g(y),y)}{G_x(g(y),y)} \Rightarrow g'(0) = \frac{-G_y(0,0)}{G_x(0,0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$g''(y) = -\frac{G_{xx}(g(y),y)\, g'(y)^2 + 2G_{xy}(g(y),y)\, g'(y) + G_{yy}(g(y),y)}{G_x(g(y),y)}$$

$$\Rightarrow g''(0) = -\frac{G_{xx}(0,0)\cdot 0 + 2G_{xy}(0,0)\cdot 0 + G_{yy}(0,0)}{G_x(0,0)} =$$

$$-\frac{G_{yy}(0,0)}{1} = 0$$

perché $G_{yy}(x,y) = 2x\, e^{xy^2} + 4x^2y^2 e^{xy^2}$ che in $(0,0)$ fa 0

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega := y\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}dx + x\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}dy$$

(a) Si dica se $\omega$ è chiusa (1p.):

$$\frac{\partial}{\partial y}\, y\,\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\, y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right) =$$

$$1-\frac{1}{x^2+y^2} + y\,\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} = 1-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\, x\,\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\, x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 1+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$ DUNQUE $\omega$ È CHIUSA

(b) si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma$ percorre in verso antiorario il bordo del cerchio $E := \{(x,y) : x^2+y^2=4)\}$ (2p.):

una parametrizzazione di $\gamma$ è $\gamma(t) = 2(\cos(t), \sin(t)) \Rightarrow$

$\dot\gamma(t) = 2(-\sin(t), \cos(t))$ $\quad (t \in [0, 2\pi]) \quad \Rightarrow$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi}\Big\{2\sin(t)\,\frac{4\cos^2(t)+4\sin^2(t)-1}{4\cos^2(t)+4\sin^2(t)}(-2\sin(t)) +$$

$$2\cos(t)\,\frac{4\cos^2(t)+4\sin^2(t)+1}{4\cos^2(t)+4\sin^2(t)}\,2\cos(t)\Big\}\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi}(-3\sin^2(t)+5\cos^2 t)\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi}(-3+8\cos^2(t))dt = \int_0^{2\pi}(-3+4(\cos(2t)+1))\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi}(1+4\cos(2t))\,dt = 2\pi + \Big[2\sin(2t)\Big]_0^{2\pi} = 2\pi$$

(c) si dica se $\omega$ è esatta e in caso affermativo si calcoli un potenziale per $\omega$ (2p.):

Dato che l'integrale su un cammino chiuso è $\neq 0 \Rightarrow \omega$ NON È ESATTA

3. Sia data la funzione di due variabili:

$$f(x, y) := e^{x^2+y^2} - 2exy.$$

(a) Si trovino tutti i punti critici di $f$ (1p.):

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,e^{x^2+y^2} - 2ey$ ; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,e^{x^2+y^2} - 2ex$

Se $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ (facendo la differenza)

$2(x-y)\,e^{x^2+y^2} - 2(y-x) = 0 \iff$

$x = y$ oppure $e^{x^2+y^2} + 1 = 0$ (IMPOSSIBILE)

Mettendo $x = y$ NELLE CONDIZIONI SOPRA $\Rightarrow$

$2x\,e^{2x^2} = 2ex \iff x = 0$ oppure $e^{2x^2} = e$

La prima condizione dà $(x, y) = (0, 0)$. La seconda

$2x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ DA CUI $(x, y) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) per ognuno dei punti trovati sopra, si dica se si tratta di massimi relativi, minimi relativi o selle (2p.):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2} \; ; \; \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy\, e^{x^2+y^2} - 2e$$

. Calcolando gli Jacobiani:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2e \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J(0,0)) = 4 - 4e < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ SELLA

$$J\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & 4e \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ AUTOVALORI $> 0$

$\Rightarrow \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ MINIMI LOCALI

(c) si trovino l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f$ su $\mathbb{R}^2$ dicendo anche se sono minimi/massimi (2p.):

Si ha $f(x,y) \geq e^{x^2+y^2} - 2e(x^2+y^2)$

(perché $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$). Ne segue

$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} f(x,y) = +\infty$. Da questo

$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$, mentre (per una conseguenza di Weierstrass) $f$ HA MINIMO. Questo minimo deve essere assunto in uno dei punti di prima

$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \inf f = \min f = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 28/1/2014. Parte B

1. Si consideri il problema differenziale:

$$\begin{cases} y' = \ln(x^2 - y^2 + 1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

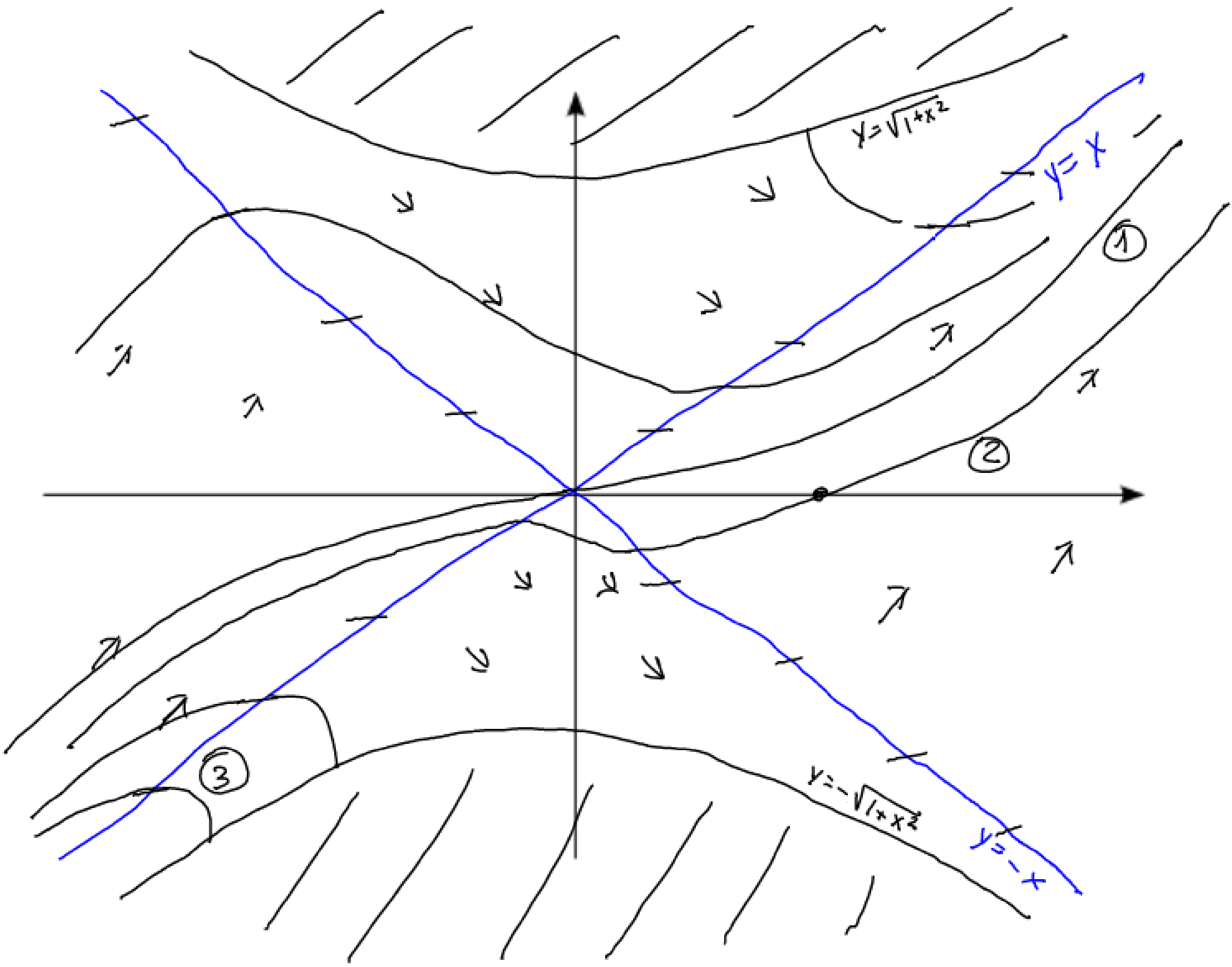
(a) Si dica per quali $(x_0, y_0)$ di $\mathbb{R}^2$ vale il teorema di esistenza locale (1p.); si trovino inoltre le zone di crescenza e decrescenza delle soluzioni (1p.) e si riportino queste informazione nel piano cartesiano schematizzato di seguito:

INSIEME DI ESISTENZA $= \{x^2 - y^2 + 1 > 0\} = A$

perché in $A$ $\exists \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2 - y^2 + 1)$.

INSIEME IN CUI $y$ CRESCE $= \{x^2 - y^2 > 0\}$

" " " " $y$ DECRESCE $= \{x^2 - y^2 < 0$



(b) Nel caso $x_0 = 0, y_0 = 0$ si trovi se i tempi massimali di esistenza $\underline{x} < x_0 < \overline{x}$ sono finiti o infiniti, a cosa tende la soluzione $y(x)$ quando $x \to \underline{x}^-$ e $x \to \overline{x}^-$ e si disegni $y(x)$ nel piano cartesiano della pagine precedente (2p.):

Partendo da $(0,0)$ con $y' = 0$, la $y(x)$ rimane tra le due rette $x = y$ e $x = -y$. Dunque $y(x)$ è crescente fino a quando non passa per una di queste rette. MA NON PUÒ FARLO PERCHÉ ci dovrebbe arrivare con derivata nulla. Dunque $\overline{x} = +\infty$ e $\underline{x} = -\infty$.

$\Downarrow$


Dico che $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$. Infatti se $l \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} y'(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - y^2(x) + 1) = +\infty \Rightarrow$ NON PUÒ essere $\lim_{x \to +\infty} y(x) = l$

(c) Stessa domanda del punto (b) nel caso $x_0 = 1, y_0 = 0$ (3p.):

Partendo da $(1,0)$ $y(x)$ deve crescere e per $x > 1$ tende a $+\infty$ rimanendo sotto la retta $y = x$ — COME NEL CASO (a). Se $x < 1$ $y(x)$ va a toccare la retta $y = -x$ IN UN PUNTO $x_1 < 1$ IN cui $y'(x_1) = 0$.
Per $x < x_1$ $y(x)$ decresce e va a incrociare la retta $y = x$ in $x_2 < x_1$ ($x_2 < 0 < x_1$), di nuovo con $y'(x_2) = 0$. Se $x < x_2$ $y(x)$ è di nuovo crescente e per $x \to -\infty$ $y(x) \to -\infty$

(d) Si dica se ci sono dati iniziali per cui la soluzione ha un tempo massimale destro finito. (2p.):

Se $(x_0, y_0)$ è vicino al ramo di iperbole $y = -\sqrt{1 + x^2}$, allora $y(x)$ va a finire sull'iperbole, con derivata infinita.

DUNQUE $\overline{x} < +\infty$

2. Si calcoli l'integrale improprio (6p.):

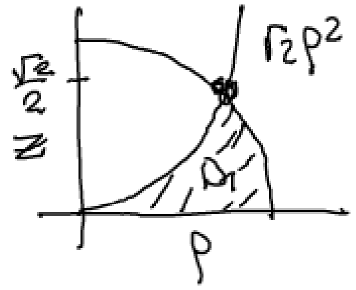
$$\iiint_D \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dxdydz, \quad \text{dove:} \quad D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, y \ge 0, x \ge 0, 0 \le z \le \sqrt{(2)}(x^2+y^2)\}$$

IN COORDINATE CILINDRICHE $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$ $z = z$ $\Rightarrow$ $dxdydz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$.

D diventa:

$$\tilde{D} = \{(\rho,\theta,z) : \rho^2 + z^2 \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le z \le \sqrt{2}\rho^2\} =$$

$$[0,\pi/2] \times D_1 \quad \text{dove } D_1 = \left\{(\rho,z) : 0 \le z \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{z}{\sqrt{2}}} \le \rho \le \sqrt{1-z^2}\right\}$$




$$\Rightarrow \iiint_D \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dxdydz =$$

$$\iiint_{\tilde{D}} \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\sqrt{z}}\,\rho\, d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{z}} \left( \int_{\sqrt{z/\sqrt{2}}}^{\sqrt{1-z^2}} \rho^3\, d\rho \right) dz = \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{z/\sqrt{2}}}^{\sqrt{1-z^2}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{4}\left((1-z^2)^2 - \frac{z^2}{2}\right)\frac{dz}{\sqrt{z}} =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(z^{-1/2} - \frac{5}{2}z^{3/2} + z^{7/2}\right) dz = \frac{1}{8}\left[2z^{1/2} - z^{5/2} + \frac{2}{9}z^{9/2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{18}\right) = \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\,\frac{28}{18} = \frac{7}{36\sqrt[4]{2}}$$

3. Si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$$

(a) Si trovi l'insieme $I$ delle $x \geq 0$ per cui la serie converge puntualmente (1p.):

$\sum \frac{x}{e^{nx}}$ CONVERGE $\forall x > 0$ PER IL CRITERIO DELLA RADICE. SE $x = 0 \Rightarrow$ LA SERIE È $\equiv 0$

$\Rightarrow I = [0, +\infty[$

(b) detta $S(x)$ la somma della serie (per $x \in I$), si dimostri che $S$ è continua su $\{x \in I : x \geq 1\}$ (2p.); si può analogamente dimostrare che $S$ è continua in $\{x \in I : x > 0\}$? (2p.)

Studiando $f_n(x) = x e^{-nx} \Rightarrow$ $\frac{1}{ne}$

$1/n$

DUNQUE $M_n = \max\limits_{x \geq 1} f_n(x) = \frac{1}{e^n}$ (perché $\frac{1}{n} \leq 1$)

Dato che $\sum\limits_n M_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum f_n$ CONV. UNIF.

$\Rightarrow S(x)$ CONTINUA SU $[1, +\infty[$. Se prendo $a > 0$

allora $M_n(a) = \max\limits_{x \geq a} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{ne} & \text{se } n \leq \frac{1}{a} \\ a e^{-na} & \text{se } n \geq \frac{1}{a} \end{cases}$

Dato che gli $n \leq 1/a$ sono un numero finito $\Rightarrow$

$\sum\limits_n M_n(a)$ CONVERGE $\Rightarrow \sum\limits_n f_n$ CONV. UNIF. SU $[a, +\infty[ \Rightarrow$

$S(x)$ CONTINUA SU OGNI $x > 0$

(c) si faccia vedere che, se $m > 0$ è intero, si ha $S(1/m) \geq \frac{1}{e}$; cosa se ne può dedurre sulla convergenza uniforme della serie su tutto $I$? (2p.)

$$S(1/m) = \sum_n \frac{1}{m} e^{-\frac{n}{m}} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} e^{-\frac{n}{m}} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{m \to \infty} S\left(\frac{1}{m}\right) \geq \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow S(x)$ NON È CONTINUA

IN $x = 0 \Rightarrow \sum f_n$ NON È UNIF. CONV. SU $[0, +\infty[$

NOTA TUTTO SI POTEVA SEMPLIFICARE NOTANDO CHE

$$\sum_n f_n(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-x}\right)^n = \frac{x}{1 - e^{-x}} \quad \left(= S(x)\right)$$