COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 9/2/2014. Parte A

1. Si consideri a funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Si dica se f è continua in $(0,0)$ (2p.):

   (b) Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$ (2p.):

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega := \frac{2x}{(x^2+4y^2)^2}dx + \frac{8y}{(x^2+4y^2)^2}dy$$

(a) Si dica se ω è chiusa (1p.):

(b) si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ percorre in verso antiorario il bordo dell'ellisse $E := \{(x,y) : x^2+4y^2 = 1)\}$ (2p.):

(c) si dica se ω è esatta e in caso affermativo si calcoli un potenziale per ω (2p.):

3. Sia data la funzione di due variabili:

$$f(x, y) := 4xy - x^2 - y^4.$$

(a) Si trovino tutti i punti critici di f (1p.):

(b) per ognuno dei punti trovati sopra, si dica se si tratta di massimi, minimi o selle (3p.):

(c) si dica se f ha massimo e se f ha minimo su $\mathbb{R}^2$ (1p.):

COGNOME E NOME:

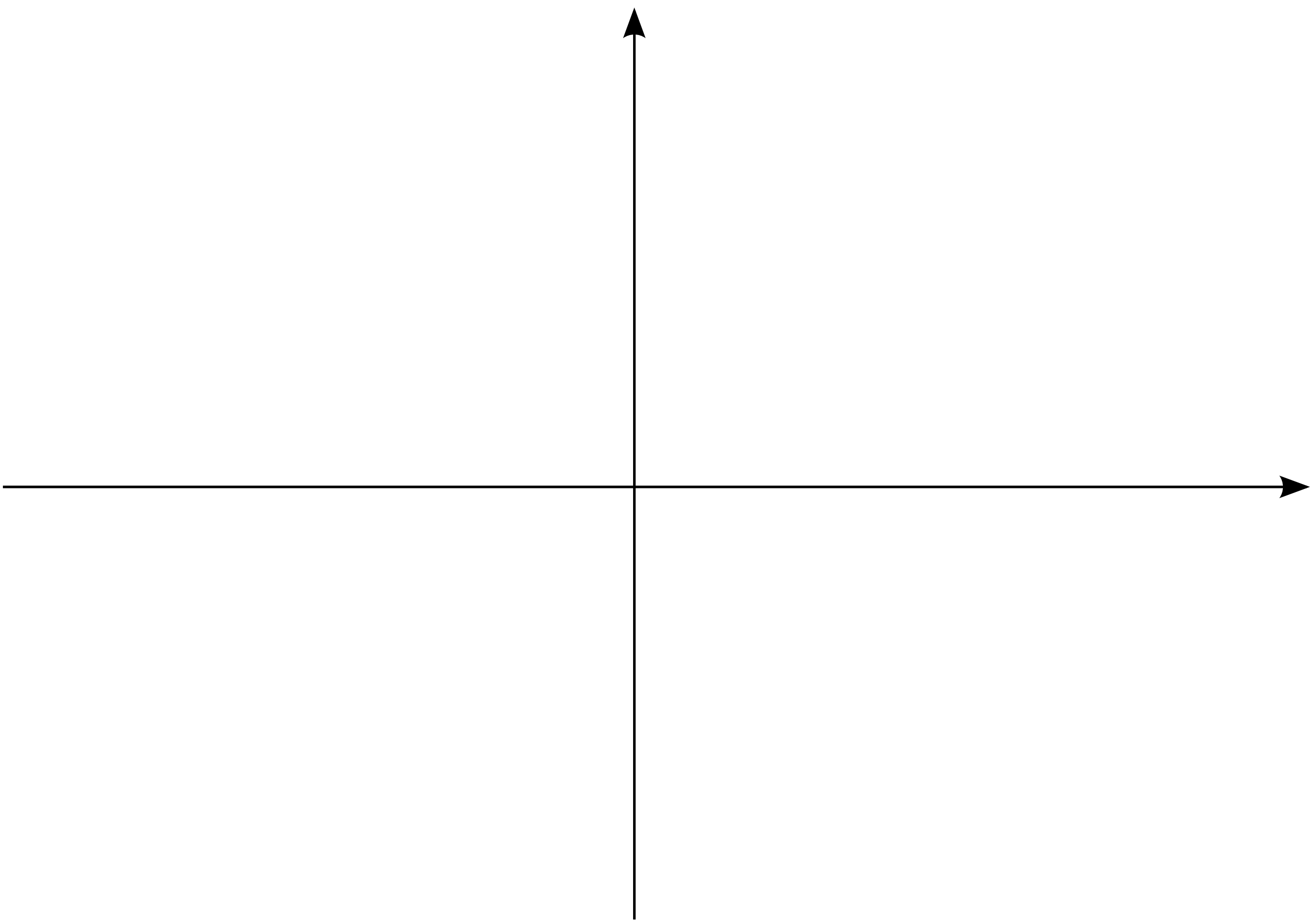
Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 9/2/2014. Parte B

1. Si consideri il problema differenziale:

$$\begin{cases} y' = \ln(y^2 - x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) di $\mathbb{R}^2$ vale il teorema di esistenza locale (chiameremo "zona ammissibile" l'insieme di tali punti) (1p.):

(b) si trovino le zone di crescenza e decrescenza delle soluzioni e si riporti questa informazione nel piano cartesiono schematizzato di seguito (disegnando anche la zona ammissibile detta prima)(2p.)



(c) si faccia vedere che, se $-1 \leq x_0 \leq 0$ e $y_0 = 0$, allora la soluzione $y(x)$ è definita per tutte le $x \geq x_0$ (il "tempo si esistenza massimale a destra" è infinito) (2p.):

(d) si dica se la funzione $F(x, y) := \ln(y^2 - x)$ (che determina il secondo membro dell'equazione) è lipschitziana su tutto il semispazio $\{(x, y) : x \leq -1\}$; si sfrutti questa informazione per dire per quali $x < -1$ esiste la soluzione con condizione iniziale $y(-1) = 0$ (2p.):

2. Si considerino il campo di vettori $\overrightarrow{f}(x,y,z)$ di coordinate

$$f_x(x,y,z) := zx^2 + \cos(y^2 z^3), \quad f_y(x,y,z) := \frac{z}{x^2+z^2}, \quad f_z(x,y,z) := z+1$$

e l'insieme

$$D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

che ha come bordo l'unione tra la "base" B e la semisfera S, date da:

$$B := \{(x,y,z) : z = 0, x^2+y^2 \leq 1\}, \qquad S := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

(a) Si calcoli il flusso di $\overrightarrow{f}(x,y,z)$ sul bordo di D (cioè su $B \cup S$) (4p.):

(b) Si calcoli il flusso di $\overrightarrow{f}(x,y,z)$ su S e su B (2p.):

3. Si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2x^2+1}$$

(a) Si trovi l'insieme I delle $x \geq 0$ per cui la serie converge puntualmente (1p.):

(b) detta $S(x)$ la somma della serie (per $x \in A$), si dimostri che S è continua su $[1, +\infty[$ (2p.); si può dire che S è continua in ogni in ogni $x > 0$? (2p.):

(c) si faccia vedere che, se $m > 0$ è intero, si ha $S(1/m) \geq \frac{1}{2}$; cosa se ne può dedurre sulla convergenza uniforme della serie su tutto $\mathbb{R}$?(2p.)