Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 3 giugno 2003 Soluzioni (A/B/C/D)

- Sef è definita da $f(x) = \sqrt{1+x^7} + a\arctan(x)$ si ha $f'(x) = \dfrac{7x^6}{2\sqrt{1+x^7}} + \dfrac{a}{1+x^2} \geq 0$. Quindi f è crescente e:

$$\boxed{\min_{[0,1]} f = 0} \quad , \quad \boxed{\max_{[0,1]} f = \sqrt{2} + a\tfrac{\pi}{4}}$$

- Data f definita da $f(x) = \ln(1+x) + ax + 2$ si ha $f(0) = 2$, $f'(0) = 1 + a$. Allora $f^{-1}(2) = 0$ e $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \boxed{\dfrac{1}{a+1}}$

- Si calcoli l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^{ax}+1}}{e^{3x}}\,dx$$

Usando prima la sostituzione $t = e^{ax}$, poi $\sqrt{t+1} = s$, infine Hermite l'integrale diventa:

$$\frac{1}{a}\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t+1}}{t^2}\,dt = \frac{1}{a}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{s^2}{(s^2-1)^2}\,ds =$$

$$\frac{1}{a}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \left(\frac{s}{s^2-1}\right)'\right) ds = \frac{1}{a}\left[\ln\left(\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}\right) - \frac{s}{s^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} =$$

$$\boxed{\frac{1}{a}\ln\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{a}\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{a}\text{settsenh}(1) + \frac{\sqrt{2}}{a}}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α converge la seguente serie (3p.):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n+\alpha}{n}} - 1 + \frac{a}{n}\right)$$

Usando lo sviluppo di Taylor si trova:

$$\sqrt{1+\alpha x} - 1 + ax = 1 + \frac{\alpha}{2}x + O(x^2) - 1 + ax = \left(\frac{\alpha}{2} + a\right)x + O(x^2)$$

Allora se $\left(\dfrac{\alpha}{2} + a\right) \neq 0$ il termine generale della serie è asintotico a $\left(\dfrac{\alpha}{2} + a\right)\dfrac{1}{n}$, da cui la serie diverge. Se invece vale l'equaglianza tale termine è asintotico a $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ e in questo unico caso la serie converge. In definitiva deve essere: $\boxed{\alpha = -2a}$.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^2\sin(n) + n^\alpha}{n^2 - n + 1}$ si ha:

a_nè limitata per $\boxed{\alpha \leq 2}$

$a_n$ha limite $(= +\infty)$per $\boxed{\alpha > 2}$

in quanto il termine $\dfrac{n^2\sin(n)}{n^2-n+1}$ è limitato ma non ha limite.

- Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+ax}\,\ln(1+x)-2x-(a-1)x^2}{x^3} = \boxed{-\frac{34}{3}/-\frac{37}{12}/-\frac{16}{3}/-\frac{97}{12}}$$

Infatti:

$$2\sqrt{1+ax}\,\ln(1+x) = 2\left(1+\frac{ax}{2}-\frac{a^2x^2}{8}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) =$$
$$2x+(a-1)x^2+\left(\frac{8-6a-3a^2}{12}\right)x^3+o(x^3)$$

per cui il limite fa $\dfrac{8-6a-3a^2}{12}$.

- Sia data la funzione $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ definita da $f(x,y)=3x^2+2y^2-ax$. Allora $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x-a$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y$. Ne segue che il piano tangente nel punto $(1,1)$ ha equazione:

$$z = 5-a+(6-a)(x-1)+4(y-1) = \boxed{-5+(6-a)x+4y}$$

che l'unico punto critico per f è:

$$\boxed{(x_1,y_1)=(a/6,0)}$$

Inoltre si vede facilmente che f tende a $+\infty$, dunque deve avere minimo; peraltro ha un solo punto stazionario e dunque

$$\boxed{f \text{ ha minimo in } \mathbf{R}^2 \boxed{\text{si}}} \quad , \quad \boxed{f \text{ ha massimo in } \mathbf{R}^2 \boxed{\text{no}}}$$

- Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2x}{x^2+1}y - x^2+1 \quad , \quad y(0)=y_0$$

· La soluzione è:

$$y(x) = (1+x^2)(y_0-x+2\arctan(x))$$

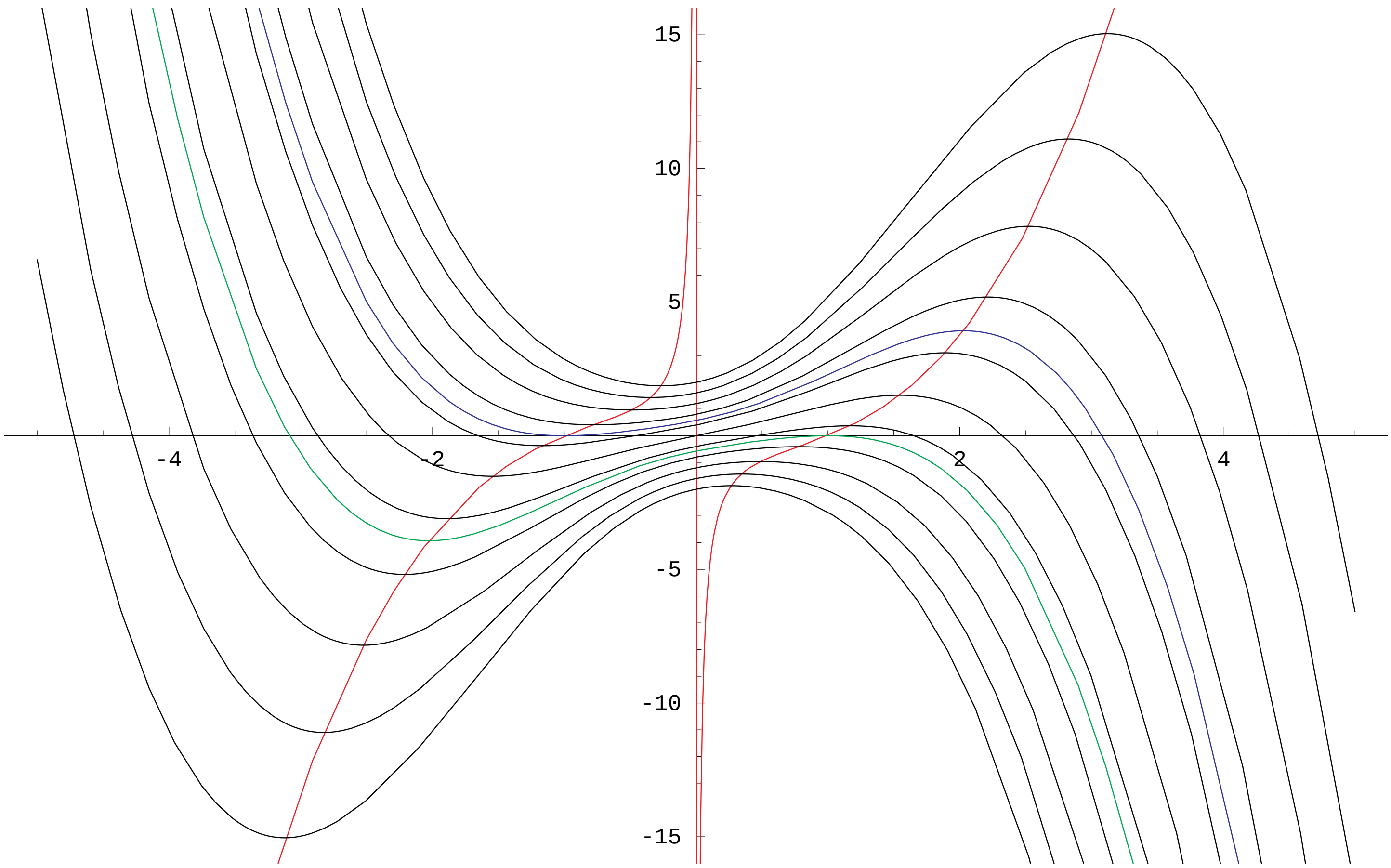
· I limiti sono:

$$\lim_{x\to-\infty} y(x)=+\infty, \lim_{x\to+\infty} y(x)=-\infty$$

· C'E' PRATICAMENTE UNA SOLA SITUAZIONE (vedi figura; la curva rossa è $g(x):=\dfrac{x^4-1}{2x}$;la curva blu è quella relativa a $y_0=-1+\pi/2$ ed è quella per cui $y(-1)=0$;la curva verde è quella relativa a $y_0=1-\pi/2$ ed è quella per cui $y(1)=0$; queste due ultime curve servono per rispondere all'ultima domanda).

· L'equazione $y(x)=0$ ha:

almeno una soluzione per ogni y_0 , almeno due soluzioni per $1-\dfrac{\pi}{2}\le y_0\le -1+\dfrac{\pi}{2}$


15
10
5
-5
-10
-15
-4
-2
2
4