Ingegneria Aerospaziale/Chimica.Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 17/2/2014. **FILA A**

1. Sia $f(x) := \ln\left(e^{x^3} - \frac{1}{2}\right)$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f'''(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:
$$f(x) := x^4 - 2x^2 + 3$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\min\limits_{-1\leq x\leq 2} f(x)$, (b) $\max\limits_{-1\leq x\leq 2} f(x)$.

3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := x^{2x}$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(1)$ (4 p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)

.
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2-2}\right)^{n^2}, \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3+2e^{5n})}{n+6}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}\sqrt[3]{1-3x} - 1}{x - \ln(1-x)}$$

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1^n) \sqrt[n]{\frac{n+1}{n^4+1}} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n!}{1+n^n}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x - \arctan(x)}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (5 punti)
$$y'' - 2y' + y = 2e^x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$$

10. Si consideri l'equazione differenziale:
$$y' + \frac{xy}{x^2+1} = 2x \qquad x \in \mathbb{R}.$$
   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (4p.);
   (b) si calcolino (al variare della suddetta C) i limiti di $y(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (2 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (3p.);
   (d) si dica per quali valori di C l'equazione $y(x) = 5$ ha due radici in $]0, +\infty[$ (3p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI **SOLO** I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 6,7,8,9 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI (NEL FOGLIO RISPOSTE) E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 ,6-9 SIA MAGGIORE O EGUALE A 16 (DA DIVIDERE POI PER 2),
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 30 (DA DIVIDERE POI PER 2).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA   PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: __ __ 2014

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila:

1. (a) 12   (b) -720

2. (a) 2   (b) 11

3. $1/2$

4. (a) e^4 (b) 5

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: 2014

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila:

6. (a) AC C ~~NC~~ (b) ~~AC~~ C NC

7. $0 < \alpha < 4$

8. $y(x) = (1 + x^2)e^x$

9. $\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio

(5) $\bullet$ $e^{\sin(x)} = e^{x+o(x^2)} = 1 + (x + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x+o(x^2))^2 + o(O(x)^2) =$

$1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\bullet$ $\sqrt[3]{1-3x} = 1 - \frac{1}{3}3x - \frac{1}{9}(-3x)^2 + o(x^2) =$

$= 1 - x - x^2 + o(x^2)$

$\bullet$ $e^{\sin(x)}\sqrt[3]{1-3x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x - x^2 + o(x^2)\right) =$

$1 \cancel{-x} - x^2 + o(x^2) \cancel{+x} - x^2 + o(x^2) + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) =$

$1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$

$\bullet$ $x - \ln(1-x) = x - \left(-x - \frac{1}{2}(-x)^2 + o(x^2)\right) =$

$2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 2x + o(x)$

SI VEDE CHE, AL NUMERATORE, BASTAVA TROVARE $o(x)$

$\Rightarrow$ LIMITE $= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{2x + o(x)} = 0$

(10) Usando la formula risolutiva: $A(x) = \int_0^x \frac{-t}{t^2+1}\,dt =$

(a) $-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) \Rightarrow y(x) = e^{A(x)}\left(y(0) + \int_0^x 2t\, e^{-A(t)}\,dt\right) =$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(y(0) + \int_0^x 2t\sqrt{1+t^2}\,dt\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(y(0) + \left[\frac{2}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(y(0) - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\right) = \boxed{\frac{y(0)-2/3}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2}{3}(1+x^2)}$$

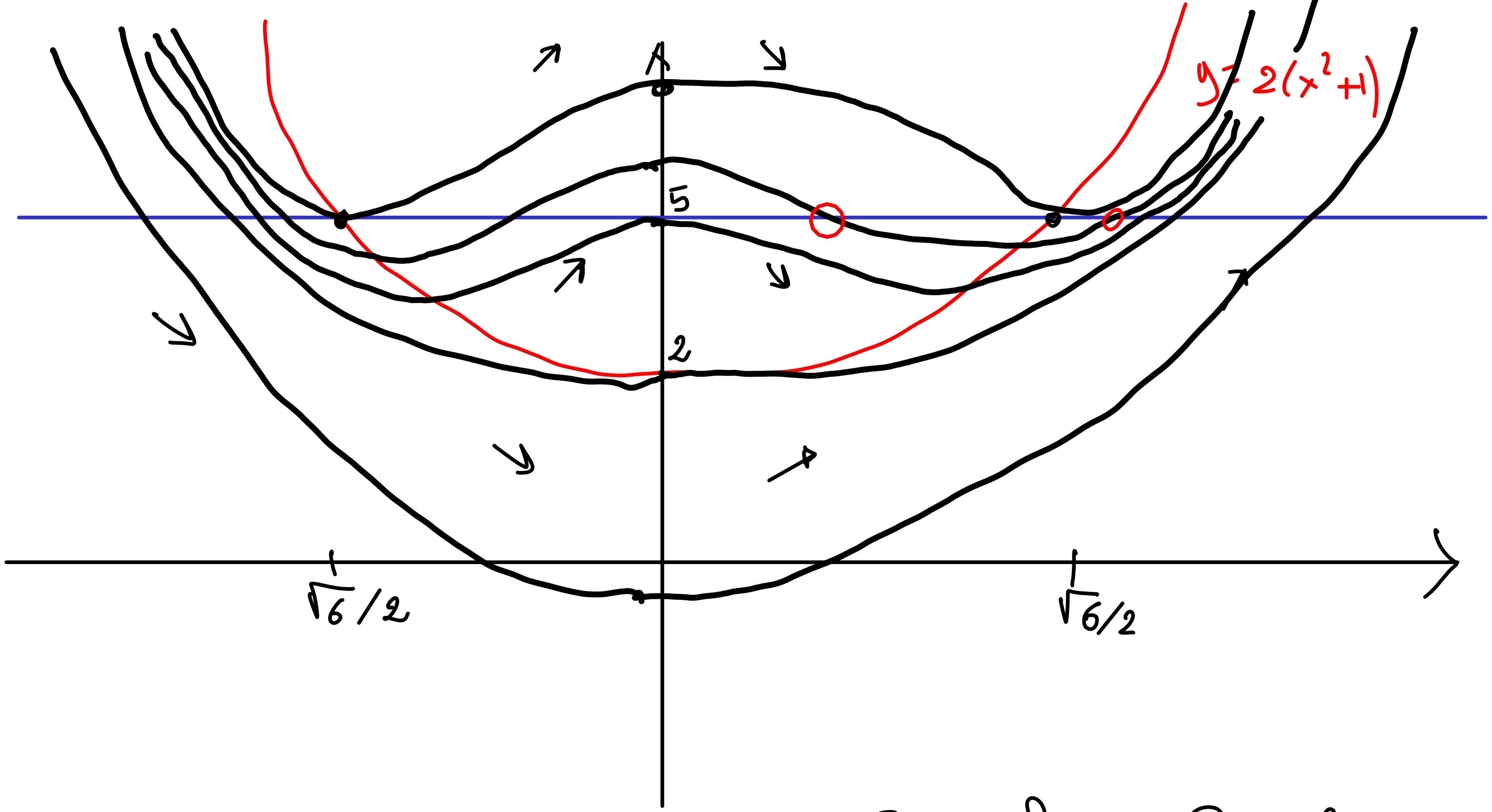
(b) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 + \infty = \boxed{+\infty}$ – stesso discorso se $x \to -\infty$

(c) Se $F(x,y) = \frac{-xy}{x^2+1} + 2x$ allora

$F(x,y) > 0 \iff \frac{x}{x^2+1}(2x^2+2-y) > 0$. Posto $g(x) = 2(x^2+1)$

si trova allora

$$F(x,y) > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \text{ e } y < g(x) \\ \text{OPPURE} \\ x < 0 \text{ e } y > g(x) \end{cases}$$



(d) Notiamo che $g(x) = 5 \iff x = \pm \sqrt{6}/2$. Se cerchiamo la soluzione tale che $y(\sqrt{6}/2) = 5$ abbiamo la condizione $\left(c = y_0 - \frac{2}{3}\right)$

$$5 = \frac{c}{\sqrt{\frac{6}{4}+1}} + \frac{2}{3}\left(\frac{6}{4}+1\right) \iff 5 = \frac{2c}{\sqrt{10}} + \frac{5}{3} \iff c = \frac{10}{3}\,\frac{\sqrt{10}}{2} \iff$$

$$y_0 = \frac{2}{3} + \frac{5\sqrt{10}}{3}$$

Si vede allora dai grafici che, per intersecare due volte l'asse x (per $x > 0$) bisogna che

$$\boxed{5 < y_0 < \frac{2+5\sqrt{10}}{3}}$$