Ingegneria Aerospaziale/Chimica.Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 23/09/2013. **FILA A**

1. Sia $f(x) := \cos(3x^2 - x^4)$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(4)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Data la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da:
$$f(x) := \frac{e^{2x^2}}{x}$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\inf_{x>0} f(x)$, (b) $\sup_{x>0} f(x)$.

3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := x + \sqrt{4 + 5^x}$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(4)$ (4 p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(1+n^2)}{\ln(1+n^6)}, \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right).$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+9x^2}\cos(2x) - e^{x^2}}{x(\tan(x) - x)}$$

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n + \sin(n)}{2^n + n!} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^{-n} + n^2}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{1 + x^3 - \cos(x)}{x^\alpha(1 + x^6)}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' + 9y = 6\cos(3x) \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{5\tan(x)}{4\tan^2(x) - 1}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' = \frac{2y}{x+1} - 2\,\frac{x^2+1}{x-1} \qquad x > -1.$$
   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
   (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (al variare della suddetta C), (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
   (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $y(x) = 3$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI **SOLO** I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 6,7,8,9 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI (NEL FOGLIO RISPOSTE) E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 ,6-9 SIA MAGGIORE O EGUALE A 16 (DA DIVIDERE POI PER 2),
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 30 (DA DIVIDERE POI PER 2).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila:

1. (a) -108 (b) 2160

2. (a) $2\sqrt{e}$ (b) $+\infty$

3. $\dfrac{6}{6+5\ln(5)}$

4. (a) $+\infty$ (b) $-\dfrac{2}{e}$

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA   PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila:

6. (a) ~~AC~~ C NC   (b) AC ~~C~~ NC

7. $-2 < \alpha < 3$

8. $y(x) = \cos(3x) + x \sin(3x)$

9. $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{3}\right)$

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio

(1) $f(x) = \cos(3x^2 - x^4)$. Applico Taylor:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}(3x^2 - x^4)^2 + o\left((3x^2 - x^4)^3\right) =$$

$$1 - \frac{1}{2}(9x^4 - 6x^6 + x^8) + o\big(\underbrace{x^6(3 - x^2)^3}_{x^6 + o(x^6)}\big) =$$

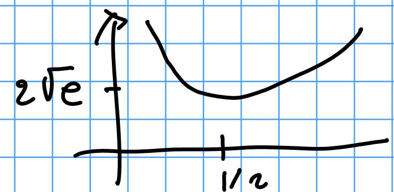
$$1 - \frac{9}{2}x^4 + 3x^6 + \underbrace{o(x^6) + o(x^6 + o(x^6))}_{o(x^6)} = 1 - \underbrace{\frac{9}{2}x^4}_{\frac{f^{(4)}(0)}{4!}} + \underbrace{3x^6}_{\frac{f^{(6)}(0)}{6!}} + o(x^6)$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(0) = -\frac{9}{2} \cdot 4! = -108 \quad ; \quad f^{(6)}(0) = 3 \cdot 6! = 2160$$

(2) $f(x) = \dfrac{e^{2x^2}}{x}$ per $x > 0$. Allora $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{4xe^{2x^2}\cdot x - e^{2x^2}}{x^2} = \frac{e^{2x^2}}{x^2}(4x^2 - 1) \quad ; \quad f'(x) = 0 \text{ per } x = 1/2$$

$$f(1/2) = 2e^{1/2} = 2\sqrt{e}$$



$\Rightarrow \inf_{x>0} f(x) = 2\sqrt{e}$ (è il minimo) $\qquad \sup_{x>0} f(x) = +\infty$

(3) $f(x) = x + \sqrt{4 + 5^x}$. Allora $f(1) = 1 + \sqrt{9} = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 1$

$$f'(x) = 1 + \frac{\ln(5)\, 5^x}{2\sqrt{4+5^x}} \quad ; \quad f'(1) = 1 + \frac{5\ln 5}{6} = \frac{6+5\ln(5)}{6}$$

$$\Rightarrow \quad (f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{6}{6+5\ln(5)}$$

(4) (a)

$$\frac{\ln^2(1+n^2)}{\ln(1+n^6)} = \frac{\ln^2\left(n^2\left(1+1/n^2\right)\right)}{\ln\left(n^6\left(1+1/n^6\right)\right)} = \frac{\left(2\ln(n) + \ln(1+1/n^2)\right)^2}{6\ln n + \ln(1+1/n^6)}$$

$$= \frac{4}{6}\,\frac{\ln^2(n)}{\ln(n)}\left(1+o(1)\right) = \frac{2}{3}\ln(n)\left(1+o(1)\right) \longrightarrow +\infty$$

(b)

$$\sqrt[n]{n!}\,\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \sqrt[n]{n!}\,\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) = \sqrt[n]{n!}\left(-\frac{2}{n+1}\right)\underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{-\frac{2}{n+1}}}_{\downarrow\, 1} =$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}_{\downarrow\, \frac{1}{e}}\underbrace{\left(-\frac{2n}{n+1}\right)}_{\downarrow\, -2}\left(1+o(1)\right) \longrightarrow -\frac{2}{e}$$

(ricordiamo che, usando Cesaro, si vede che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \longrightarrow \frac{1}{e}$

(5) SI HA (Taylor)

- $$\sqrt[3]{1+9x^2} = 1 + \frac{1}{3}\cdot 9x^2 - \frac{1}{9}\left(9x^2\right)^2 + o\left(\left(9x^2\right)^2\right) =$$

$$1+3x^2-9x^4+o(x^4)$$

- $\cos(2x) = 1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o(x^4) =$
$$1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$$

- $e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$ DA CUI

- $\sqrt[3]{1+9x^2}\cos(2x)-e^{x^2} =$

$$\left(1+3x^2-9x^4+o(x^4)\right)\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)-1-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=$$

$$\cancel{1}-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)+3x^2-6x^4+o(x^4)-9x^4+o(x^4)-\cancel{1}-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=$$

$$\left(\frac{2}{3}-6-9-\frac{1}{2}\right)x^4+o(x^4) = -\frac{89}{6}x^4+o(x^4)$$

- $\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \Rightarrow x(\tan(x)-x) = \frac{x^4}{3}+o(x^4)$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{1+9x^2}\cos(2x)-e^{x^2}}{x(\tan(x)-x)} = \frac{-\frac{89}{6}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)} \to \boxed{-\frac{89}{2}}$$

(6) (a) $a_n := \frac{(-3)^n+\sin(n)}{2^n+n!}$. Allo

$$|a_n| = \frac{3^n \left|(-1)^n + \sin(n)/3^n\right|}{2^n + n!} = \frac{3^n}{2^n + n!} = \frac{3^n}{n!}\left(\frac{1}{1+2^n/n!}\right) \simeq \frac{3^n}{n!}$$

Dato che $\sum_n \frac{3^n}{n!}$ converge (a e^3) (per vederlo si può usare la radice)

$\Rightarrow \sum_n |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

(b) $a_n = \frac{(-1)^n n}{3^{-n} + n^2}$. Allora $|a_n| = \frac{n}{n^2 + 3^{-n}} \simeq \frac{1}{n}$

da cui $\sum_n |a_n|$ DIVERGE.

Però $|a_n|$ è decrescente per n grande per cui $\sum_n a_n = \sum (-1)^n |a_n|$

è CONVERGENTE a causa del Teorema di Leibniz

(7)

$$f(x) = \frac{1 + x^3 - \cos(x)}{x^\alpha (1 + x^6)}.$$

PER $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1 + x^3 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} \simeq \frac{1}{2x^{\alpha-2}}$$

DUNQUE $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 3$

PER $x \to +\infty$ $\quad f(x) = \dfrac{x^3 + o(x^3)}{x^{6+\alpha} + o(x^{6+\alpha})} \simeq \dfrac{1}{x^{3+\alpha}}$

DUNQUE $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff 3+\alpha > 1 \iff \alpha > -2$

IN DEFINITIVA $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff$ $\boxed{-2 < \alpha < 3}$

(8)

$$y'' + 9y = 6\cos(3x)$$

Sol. omogenea : $\quad y = A\cos(3x) + B\sin(3x)$

Sol. particolare del tipo $\bar{y}(x) = x\left(C\cos(3x) + D\sin(3x)\right) \Rightarrow$

$$\bar{y}'(x) = C\cos(3x) + D\sin(3x) + x\left(3D\cos(3x) - 3C\sin(3x)\right)$$

$$\bar{y}''(x) = 6D\cos(3x) - 6C\sin(3x) - 9x\left(C\cos(3x) + D\sin(3x)\right)$$

$$\bar{y}''(x) + 9\bar{y}(x) = 6D\cos(3x) - 6C\sin(3x)$$

e quindi $C = 0 \quad D = 1$, cioè $\bar{y}(x) = x\sin(3x)$ dunque

$$y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + x\sin(3x)$$

$\Rightarrow \quad y(0) = A \qquad y'(0) = B \qquad$ da cui $A = 1 \quad B = 0$

DUNQUE $y(x) = \boxed{\cos(3x) + x\sin(3x)}$

(9) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{5\tan(x)}{4\tan^2(x)-1}\,dx$; sostituisco $t = \tan(x) \Longrightarrow$

$x = \arctan(t) \quad dx = \dfrac{dt}{t^2+1}$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{5t\,dt}{(4t^2-1)(t^2+1)} = ⊛.$$

Riduciamo in fratti semplici

$$\frac{5t}{(4t^2-1)(t^2+1)} = \frac{A}{2t-1} + \frac{B}{2t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1} =$$

$$\frac{A(2t+1)(t^2+1) + B(2t-1)(t^2+1) + Ct(4t^2-1) + D(4t^2-1)}{(4t^2-1)(t^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A + 2B + 4C = 0 \\ A - B + 4D = 0 \\ 2A + 2B - C = 5 \\ A - B - D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5C = -5 & (\mathrm{I}-\mathrm{III}) \\ 2A + 2B = 4 & (\mathrm{III} - \text{con } C = -1) \\ 5D = 0 & \mathrm{II} - \mathrm{IV} \\ A - B = 0 & (\mathrm{IV} \text{ con } D = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \\ D = 0 \end{cases}$$ da cui $⊛ = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t-1} + \frac{1}{2t+1}\right) dt - \int_1^{+\infty} \frac{t\,dt}{1+t^2} =$

$$\left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(2x+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^x = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{4x^2-1}{x^2+1}\right)\right]_1^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln 4 - \ln\frac{3}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)}$$

(10) $$y' = \frac{2y}{x+1} - 2\,\frac{x^2+1}{x+1} \qquad x > -1$$

(a) Usando la formula risolutiva:

$(t+1-1)^2$

$$y(x) = (x+1)^2\left\{y(0) - 2\int_0^x \frac{t^2+1}{(t+1)^3}\,dt\right\} =$$

$$(x+1)^2\left\{y(0) - 2\int_0^x \frac{(t+1)^2 - 2(t+1) + 2}{(t+1)^3}\right\} =$$

$$(x+1)^2\left\{y(0) - 2\int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2} + \frac{4}{(t+1)^3}\right)dt\right\} =$$

$$(x+1)^2\left\{c - 2\ln(x+1) - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right\}$$

dove $c = y(0) + 2$

$$= c(x+1)^2 - 2(x+1)^2\ln(x+1) - 4(x+1) + 2$$

(b) $$\lim_{x\to -1^+} y(x) = 2 + \underbrace{\lim_{x\to -1^+} (x+1)\big(c(x+1) - 2(x+1)\ln(x+1) - 4\big)}_{=0^-} = 2^-$$

$$\lim_{x\to +\infty} y(x) = -\infty$$

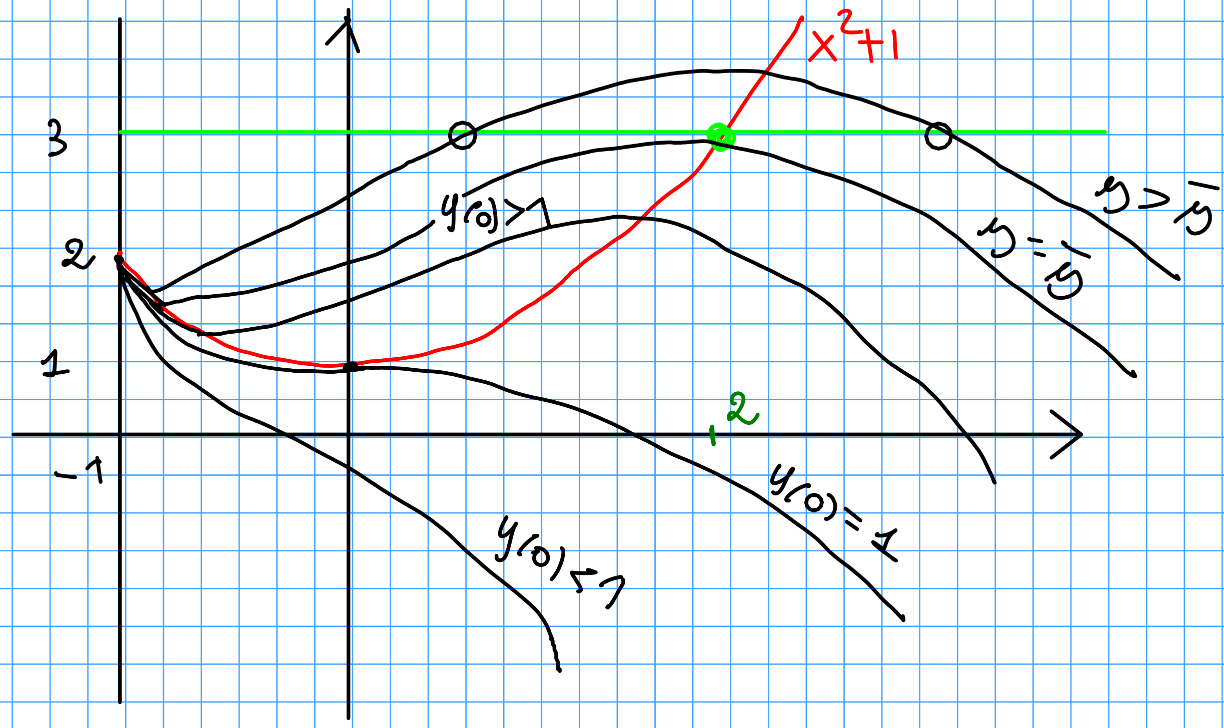
(c) Poniamo $F(x,y) = \frac{2y}{x+1} - 2\frac{x^2+1}{x+1}$. Allora (se $x>-1$)

$$F(x,y) > 0 \iff y > x^2+1 =: g(x).$$

Dato che l'eq. è $y' = F(x,y)$ si ha che y cresce quando $y(x) > g(x)$ e decresce quando $y(x) < g(x)$.

Si ricavano i grafici riportati di seguito. Si nota che tutte le $y(x)$, per $x \to -1$, arrivano a 2 da "sotto la curva g"; inoltre per $x\to+\infty$ tutte le $y(x)$ "tornano giù", dovendo andare a $-\infty$!

(d) Si vede dal grafico che le $y(x)$ che intersecano due volte la retta $y=3$ sono quelle con $y(0) > \bar{y}$ dove $\bar{y}$ è il valore di $y(0)$ per cui la corrispondente $y(x)$ verifica $y(2) = 3$



Se impongo $y(2) = 3$ trovo

$$3 = (\bar{y}+1)(2+1)^2 - 2(2+1)^2\ln(2+1) - 4(2+1) + 2 \iff$$

$$3 = (\bar{y}+1)\,9 - 18\ln(3) - 12 + 2 \iff$$

$$\bar{y} = \frac{13+18\ln(3)}{9} - 1 = \boxed{\frac{4}{9} + 2\ln(3)}$$

Dunque per la (d) deve $y > \frac{4}{9} + 2\ln(3)$