Ingegneria Aerospaziale/Chimica.Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 10/09/2013. **FILA A**

1. Sia $f(x) := e^{2+\frac{x^3}{4}}$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Data la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) := \frac{3x - \ln(x)}{x}$$

Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\inf f(x)$, (b) $\sup f(x)$.

3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := x + \sqrt{3 + e^x}$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(2)$ (4 p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n^3 \ln\left(\frac{n^3 - 2}{n^3 + 2}\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1 + n2^n}}{\sqrt[n]{n^2 - n + 8}}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)e^{5x^2/2} - \cos(x)\sqrt{1 + 2x^2}}{\ln(1 + x^2) - x^2}$$

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{1 + 3^n}} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 + \sin(3x)}{x^\alpha(1 + x^5)}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):

$$\begin{cases} y'' + 9y + 6\sin(3x) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 4 \end{cases}$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{4\tan(x) + 12}{\tan^2(x) - 1}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' + \frac{2y}{x + 1} = \frac{3}{x^2 - 5x + 4} \qquad -1 < x < 1.$$

   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
   (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -1$ e per $x \to 1$ (al variare della suddetta C), (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
   (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $8y(x) = 3$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI **SOLO** I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 6,7,8,9 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI (NEL FOGLIO RISPOSTE) E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 ,6-9 SIA MAGGIORE O EGUALE A 16 (DA DIVIDERE POI PER 2),
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 30 (DA DIVIDERE POI PER 2).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

1. (a) $\frac{3}{2} e^2$ (b) $\frac{45}{2} e^2$

2. (a) $3 - \frac{1}{e}$ (b) $+\infty$

3. $\frac{4}{5}$

4. (a) -4 (b) 2

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila:

6. (a) AC C ~~NC~~ (b) AC ~~C~~ NC

7. $-1 < \alpha < 2$

8. $y(x) = \sin(3x) + x\cos(3x)$

9. $\ln 2 + 3\ln(2+\sqrt{3}) - \pi$

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio

(1) $$f(x) = e^{2+x^3/4} = e^2\, e^{\frac{x^3}{4}} = e^2\left(1+\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{4}\right)^2+o(x^6)\right)$$

$$= e^2 + \underbrace{\frac{e^2}{4}}_{\frac{f'''(0)}{3!}} x^3 + \underbrace{\frac{e^2}{32}}_{\frac{f^{VI}(0)}{6!}} x^6 + o(x^3) \Rightarrow$$

$$f'''(0) = \frac{e^2}{4}\,3! = \frac{3e^2}{2}$$

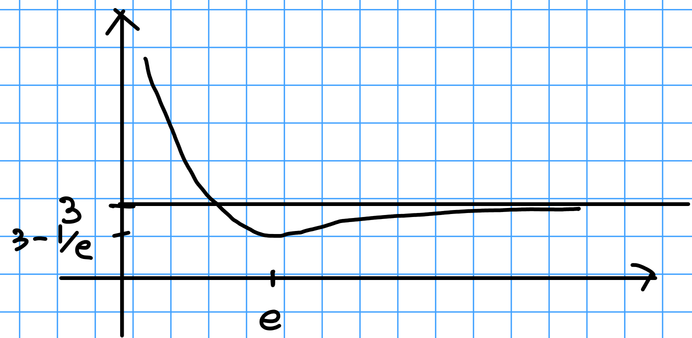
$$f^{IV}(0) = \frac{e^2\,6!}{32} = \frac{45}{2}e^2$$

(2) $$f(x) = \frac{3x-\ln(x)}{x} = 3-\frac{\ln(x)}{x}.$$ Allora

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, $f'(x) = -\frac{\frac{x}{x}-\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)-1}{x^2}$

e $f'(x)=0 \iff x = e$. $f(e) = 3-\frac{1}{e}$

Dunque il grafico di f è $\longrightarrow$



per cui $\inf f = 3-\frac{1}{e}$; $\sup f = +\infty$

(3) $f(x) = x+\sqrt{3+e^x}$ Allora $f(0) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 0$

$f'(x) = 1+\frac{e^x}{2\sqrt{3+e^x}}$ $\Rightarrow f'(0) = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

$\Rightarrow (f^{-1})'(2) = 1/f'(0) = \frac{4}{5}$

(4) (a)

$$n^3 \ln\left(\frac{n^3-2}{n^3+2}\right) = n^3 \ln\left(1-\frac{4}{n^3+2}\right) = -\underbrace{n^3\cdot\frac{4}{n^3+2}}_{\downarrow\ 4}\ \underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{4}{n^3+2}\right)}{-\frac{4}{n^3+2}}}_{\downarrow\ 1} \longrightarrow -4$$

(b)

$$\sqrt[n]{1+n2^n} = 2\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow\ 1}\ \underbrace{\sqrt[n]{1+1/n2^n}}_{\downarrow\ 1} \longrightarrow 2$$

$$\sqrt[n]{n^2-n+8} = \underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{\downarrow\ 1}\ \underbrace{\sqrt[n]{1-1/n+8/n^2}}_{\downarrow\ 1} \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{1+n2^n}}{\sqrt[n]{n^2-n+8}} \longrightarrow 2$$

(5) Usando Taylor si trovo:

- $\cos(2x)\, e^{5x^2/2} =$

$$\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{5x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}x^2\right)^2+o(x^4)\right)=$$

$$\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)\left(1+\frac{5}{2}x^2+\frac{25}{8}x^4+o(x^4)\right)=$$

$$1+\frac{5}{2}x^2+\frac{25}{8}x^4+o(x^4)-2x^2-5x^4+o(x^4)+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)+o(O(x^4))=$$

$$1+\frac{1}{2}x^2-\frac{29}{24}x^4+o(x^4)$$

$$\frac{75-120+16}{24}$$

• $\cos(x)\sqrt{1+2x^2} = \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{1}{2}2x^2-\frac{1}{8}(2x^2)^2+o(x^4)\right) =$

$\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\left(1+x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right) =$

$1+x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}+o(x^4)+\frac{x^4}{24}+o(x^4)+o(O(x^4)) =$

$1+\frac{x^2}{2}-\frac{23}{24}x^4+o(x^4)$

• $\ln(1+x^2)-x^2 = x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)-x^2 = -\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

DUNQUE

$$\frac{\cos(2x)e^{\frac{5x^2}{2}}-\cos(x)\sqrt{1+2x^2}}{\ln(1+x^2)-x^2} =$$

$$\frac{\cancel{1}+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{29}{24}x^4+o(x^4)-\cancel{1}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{23}{24}x^4+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)} = \frac{-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)} \to \boxed{\frac{1}{2}}$$

(6) (a) Se $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{1+8^n}} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{3\sqrt{1+3^{-n}}} \to \frac{1}{3} \neq 0$

Dunque a_n NON TENDE A ZERO $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ NON CONVERGE $\boxed{NC}$

(6) Se $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ allora $|a_n| = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Ricordiamo che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ (si vede con Cesaro) e quindi

$|a_n| \sim \frac{e^{-1}}{n}$ per cui $\sum_n |a_n|$ NON CONVERGE

Però si vede che $|a_n|$ è decrescente, infatti

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} < 1 .$$ Dunque per Leibniz

$\sum_n (-1)^n |a_n| = \sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ RISPOSTA: $\boxed{C}$

(7) $$f(x) = \frac{x^3 + \sin(3x)}{x^\alpha (1 + x^5)}$$

PER $x \to 0$ $$f(x) = \frac{x^3 + 3x + o(x)}{x^\alpha (1 + o(1))} = \frac{3x}{x^\alpha}(1+o(1)) \simeq \frac{3}{x^{\alpha-1}}$$

DUNQUE $\int_0^1 f(x)\,dx$ CONV. $\Leftrightarrow$ $\alpha - 1 < 1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha < 2$

PER $x \to +\infty$ $$f(x) = \frac{x^3 + o(x^3)}{x^\alpha (x^5 + o(x^5))} = \frac{x^3}{x^\alpha x^5}(1+o(1)) \simeq \frac{1}{x^{\alpha+2}}$$

DUNQUE $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ CONV. $\iff \alpha+2>1 \iff \underline{\alpha > -1}$

IN DEFINITIVA $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE $\iff \boxed{-1 < \alpha < 2}$

(8) $\begin{cases} y'' + 9y + 6\sin(3x) = 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 4 \end{cases}$

Le sol. dell'omogenea sono $A\cos(3x) + B\sin(3x)$, $A,B \in \mathbb{R}$

Cerco una sol. particolare della forma $\underbrace{x\left(C\cos(3x) + D\sin(3x)\right)}_{\bar{y}(x)}$

(perchè $\sin(3x)$ è sol. dell'omogenea!)

Facendo i conti

$\bar{y}'(x) = (C + 3Dx)\cos(3x) + (D - 3Cx)\sin(3x)$

$\bar{y}''(x) = (6D - 9Cx)\cos(3x) - (6C + 9Dx)\sin(3x)$

$\bar{y}'' + 9\bar{y}(x) = 6D\cos(3x) - 6C\sin(3x)$

per cui prendo $D = 0$ $C = 1$ e quindi

$$y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + x\cos(3x)$$

$\Rightarrow$ $y'(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) + \cos(3x) - 3x\sin(3x)$

$\Rightarrow \quad y(0) = A \qquad y'(0) = 3B + 1$.

IMPONENDO LE CONDIZIONI IN ZERO $\Rightarrow$ $A=0 \quad B=1$

(9) $$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{4\tan(x)+12}{\tan^2(x)-1}\,dx$$

Sostituisco $y = \tan(x) \iff x = \arctan y \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{y^2+1}$

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{4y+12}{(y^2-1)(y^2+1)}\,dy = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\left(\frac{4}{y-1} - \frac{2}{y+1} - \frac{2(3+y)}{y^2+1}\right)dy =$$

(riduzione in fratti semplici ..)

$$\Big[4\ln(y-1) - 2\ln(y+1) - \ln(y^2+1) - 6\arctan(y)\Big]_{\sqrt{3}}^{+\infty} =$$

$$\left[\ln\left(\frac{(y-1)^4}{(y+1)^2(y^2+1)}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{+\infty} - 6\Big[\arctan(y)\Big]_{\sqrt{3}}^{+\infty} =$$

$$-\ln\left(\frac{(\sqrt{3}-1)^4}{(\sqrt{3}+1)^2(3+1)}\right) - 6\frac{\pi}{2} + 6\frac{\pi}{3} = \ln\frac{(3+2\sqrt{3}+1)\,4}{(3-2\sqrt{3}+1)^2} - \pi =$$

$$\ln\left(\frac{2(2+\sqrt{3})\cancel{4}}{\cancel{4}(2-\sqrt{3})^2}\right) - \pi = \ln\left(2\,\frac{(2+\sqrt{3})^3}{(4-3)^2}\right) - \pi = \ln 2 + 3\ln(2+\sqrt{3}) - \pi$$

$$3+1+2\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3} \qquad \frac{7-4\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$$

$$28+16\sqrt{3}+14\sqrt{3}+24 = 52+30\sqrt{3}$$

(10)
$$y' = -\frac{2y}{x+1} + \frac{3}{x^2-5x+4} \qquad -1 < x < 1$$

(a) applicando la formula risolutiva $\left(x^2-5x+4 = (x-4)(x-1) \right)$

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left\{ y(0) + \int_0^x \frac{3(t+1)^2}{(t-1)(t-4)}\,dt \right\} =$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}\left\{ y(0) + \int_0^x 3 + \frac{25}{t-4} - \frac{4}{t-1} \right\} =$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}\left\{ y(0) + 3x + 25\ln(4-x) - 25\ln 4 - 4\ln(1-x) \right\}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}\left\{ c + 3x + 25\ln(4-x) - 4\ln(1-x) \right)$$

dove $c = y(0) - 25\ln(4)$

(b)

- $$\lim_{x \to -1} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > c_0 = 3 - 25\ln 5 + 4\ln 2 \\ 0 & \text{se } c = c_0 \\ -\infty & \text{se } c < c_0 \end{cases}$$

Il caso $c = c_0$ ho bisogno di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to -1} \frac{c + 3x + 25\ln(4-x) - 4\ln(1-x)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{3\,\frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{(x-4)(x-1)}}{2\cancel{(x+1)}} = 0$$

(perché il numeratore – per come è stato trovato – è la primitiva di $\frac{3(x+1)^2}{(x-4)(x-1)}$)

Gli altri casi sono immediati: viene $\frac{c-c_0}{0^+} = +\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno di $c-c_0$

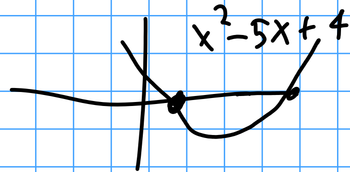
- $\lim_{x\to 1} y(x) = \frac{c+3+25\ln 3 - 4\ln(0)}{1} = +\infty$

c) Se $F(x,y) = -\frac{2y}{1+x} + \frac{3}{(x^2-5x+4)}$

allora $F(x,y) > 0 \iff y < \underbrace{\frac{3(1+x)}{2(x^2-5x+4)}}_{g(x)}$ $\quad (-1 < x < 1)$

Studiando $g(x)$ su $[-1,1]$ si ha

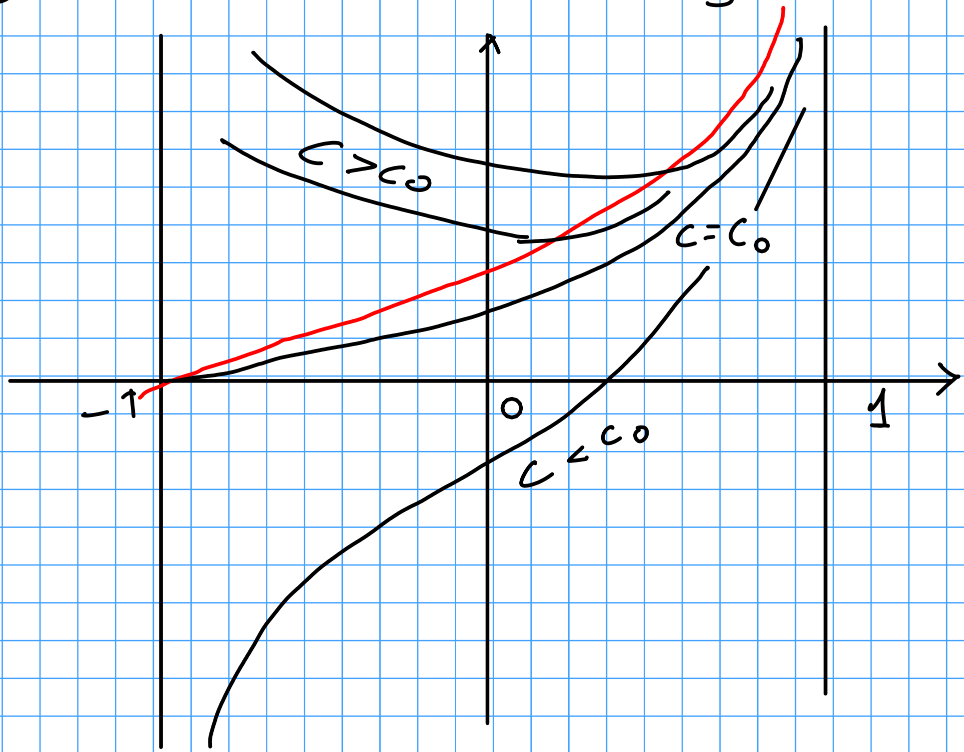
$g(-1) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 0^+} = +\infty$, $g(0) = \frac{3}{8}$



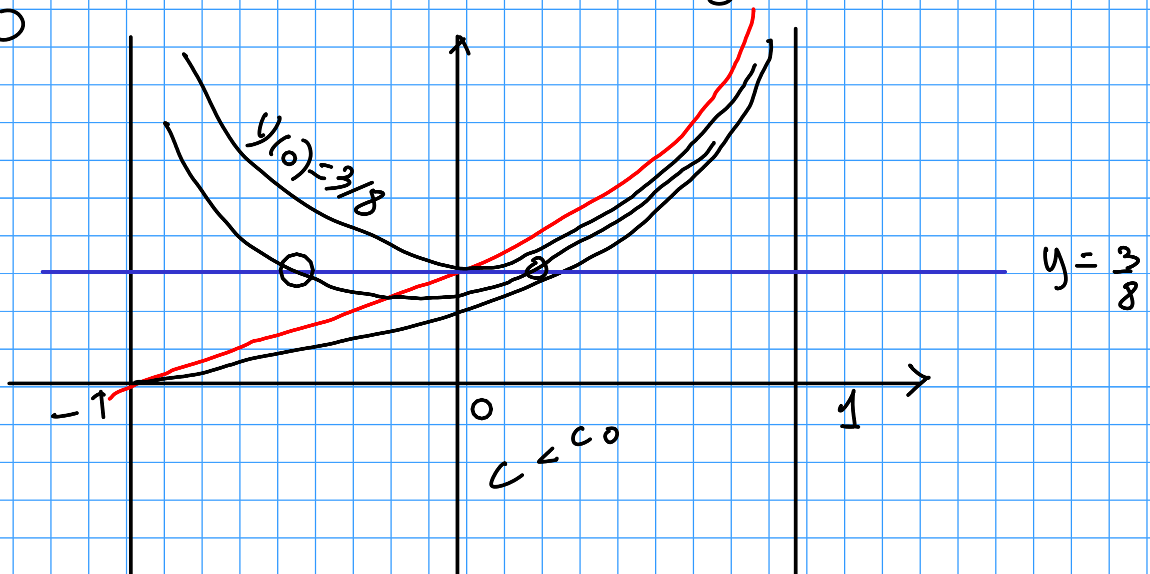
$$g'(x) = -\frac{3}{2}\,\frac{x^2+2x-9}{(x^2-5x+4)^2}$$

NON HA RADICI IN $]-1,1[$

Tracciando il grafico di g (curva rosso) e usando l'equazione (y cresce (decresce) se y è sotto (sopra) il grafico di g) si ha:



(d) Tracciamo la retta $y = \frac{3}{8}$, che interseca il grafico di g in $x=0$



Si vede che y interseca 2 volte la retta se

$$y_0 < y(0) < \frac{3}{2}$$

dove y_0 è il valore in zero della curva con $c = c_0$

$$\Rightarrow y_0 = 54\ln(2) - 25\ln 5 + 3$$