Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 19 luglio 2013. **FILA A**

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{8-x^3} - 2x + 3x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Data la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da:
$$f(x) := \frac{4x + \ln(x)}{x}$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\inf f(x)$, (b) $\sup f(x)$.

3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 2 + 3x + xe^{x+1}$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(2)$ (4 p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{\frac{n^2+3n+2}{n^2-2n+3}} - 1\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3+3^{-n}}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}\sqrt[3]{1+6x} - e^x\sqrt{1-4x}}{\ln(1-2x)+2x}$$

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-(-1)^n n^2}{n^3-2n+3} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{4n^3+n!}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 2\arctan(x)}{x^\alpha(1+x^3)}\,dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' + 4y = 4\cos(2x) \\ y(0) = 2, y'(0) = 0 \end{cases}$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2(2x)}{\tan^2(2x)-1}\,dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{2y}{x+1} = \frac{1}{x^2-3x+2} \qquad -1 < x < 1.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
    (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -1$ e per $x \to 1$ (al variare della suddetta C), (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
    (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $4y(x) = 1$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI **SOLO** I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 6,7,8,9 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI (NEL FOGLIO RISPOSTE) E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 ,6-9 SIA MAGGIORE O EGUALE A 16 (DA DIVIDERE POI PER 2),
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 30 (DA DIVIDERE POI PER 2).

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 19 luglio 2013. **FILA B**

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{8-x^3} - 3x + 2x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Data la funzione $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da:
$$f(x) := \frac{3x + \ln(x)}{x}$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\inf f(x)$, (b) $\sup f(x)$.

3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 3 + 2x + xe^{x+1}$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(3)$ (4 p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{\frac{n^2+4n+3}{n^2-3n+4}} - 1\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4+3^{-n}}{\sqrt[n]{3^n+4^n}}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}\sqrt[3]{1+6x} - e^x\sqrt{1-4x}}{\ln(1-2x)+2x}$$

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n n^2}{n^3-3n+2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3n^2+n!}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+3\arctan(x)}{x^{\alpha}(1+x^2)}\,dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y''+4y = 4\cos(2x) \\ y(0)=0, y'(0)=6 \end{cases}$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2(3x)}{\tan^2(3x)-1}\,dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{2y}{x+1} = \frac{1}{x^2-3x+2} \qquad -1 < x < 1.$$
   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
   (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -1$ e per $x \to 1$ (al variare della suddetta C), (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
   (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $4y(x) = 1$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI **SOLO** I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 6,7,8,9 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI (NEL FOGLIO RISPOSTE) E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 ,6-9 SIA MAGGIORE O EGUALE A 16 (DA DIVIDERE POI PER 2),
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 30 (DA DIVIDERE POI PER 2).

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 19 luglio 2013. **FILA C**

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{8-x^3} - 4x + 5x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.
2. Data la funzione $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da:
$$f(x) := \frac{2x + \ln(x)}{x}$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\inf f(x)$, (b) $\sup f(x)$.
3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 4 + 5x + xe^{x+1}$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(4)$ (4 p.).
4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{\frac{n^2+5n+4}{n^2-4n+5}} - 1\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{5+3^{-n}}{\sqrt[n]{4^n+5^n}}.$$
5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}\sqrt[3]{1+6x} - e^x\sqrt{1-4x}}{\ln(1-2x)+2x}$$
6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n n^2}{n^3-4n+5} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{2n^5+n!}$$
7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 4\arctan(x)}{x^{\alpha}(1+x^5)}\,dx$$
8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' + 4y = 4\cos(2x) \\ y(0) = 3, y'(0) = 0 \end{cases}$$
9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{\tan^2(4x)}{\tan^2(4x)-1}\,dx$$
10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{2y}{x+1} = \frac{1}{x^2-3x+2} \qquad -1 < x < 1.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
    (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -1$ e per $x \to 1$ (al variare della suddetta C), (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
    (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $4y(x) = 1$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI **SOLO** I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 6,7,8,9 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI (NEL FOGLIO RISPOSTE) E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 ,6-9 SIA MAGGIORE O EGUALE A 16 (DA DIVIDERE POI PER 2),
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 30 (DA DIVIDERE POI PER 2).

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 19 luglio 2013. **FILA D**

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{8-x^3} - 5x + 4x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Data la funzione $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) := \frac{5x + \ln(x)}{x}$$

Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\inf f(x)$, (b) $\sup f(x)$.

3. Data la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 5 + 4x + xe^{x+1}$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(5)$ (4 p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{\frac{n^2+2n+5}{n^2-5n+2}} - 1\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2+3^{-n}}{\sqrt[n]{5^n+2^n}}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}\sqrt[3]{1+6x} - e^x\sqrt{1-4x}}{\ln(1-2x)+2x}$$

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-(-1)^n n^2}{n^3-5n+4} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{5n^4+n!}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+5\arctan(x)}{x^{\alpha}(1+x^4)}\,dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):

$$\begin{cases} y''+4y = 4\cos(2x) \\ y(0)=0, y'(0)=4 \end{cases}$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_{\frac{\pi}{15}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{\tan^2(5x)}{\tan^2(5x)-1}\,dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' + \frac{2y}{x+1} = \frac{1}{x^2-3x+2} \qquad -1 < x < 1.$$

   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
   (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -1$ e per $x \to 1$ (al variare della suddetta C), (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
   (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $4y(x) = 1$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI **SOLO** I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 6,7,8,9 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI (NEL FOGLIO RISPOSTE) E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 ,6-9 SIA MAGGIORE O EGUALE A 16 (DA DIVIDERE POI PER 2),
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 30 (DA DIVIDERE POI PER 2).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

1. (a) $\frac{35}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ 4

2. (a) $-\infty$ (b) $\frac{4e+1}{e}$ 4

3. $\frac{1}{3+e}$ 4

4. (a) 1 (b) 1 8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

1. (a) $\frac{23}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ 4

2. (a) $-\infty$ (b) $\frac{3e+1}{e}$ 4

3. $\frac{1}{2+e}$ 4

4. (a) $\frac{7}{5}$ (b) 1 8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA   PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: | | | | | 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

1. (a) $\frac{59}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ 4

2. (a) $-\infty$ (b) $\frac{2e+1}{e}$ 4

3. $\frac{1}{5+e}$ 4

4. (a) $\frac{9}{5}$ (b) 1 8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio   13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

1. (a) $\frac{47}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ 4

2. (a) $-\infty$ (b) $\frac{5e+1}{e}$ 4

3. $\frac{1}{4+e}$ 4

4. (a) $\frac{7}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$ 8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

6. (a) AC $\cancel{\text{C}}$ NC (b) $\cancel{\text{AC}}$ C NC — 4

7. $0 < \alpha < 2$ — 4

8. $y(x) = 2\cos(2x) + x\sin(2x)$ — 5

9. $\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3} + \ln(\sqrt{3}+2)\right)$ — 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio — 12

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data:			2013
Cognome:			
Nome:			
Matricola:			
Fila:	B		

6. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC — 4

7. $1 < \alpha < 2$ — 4

8. $y(x) = 3\sin(2x) + x\sin(2x)$ — 5

9. $\frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{3} + \ln(\sqrt{3}+2)\right)$ — 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio — 12

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

6. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC — 4

7. $-2 < \alpha < 2$ — 4

8. $y(x) = 3\cos(2x) + x\sin(2x)$ — 5

9. $\frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{3} + \ln(\sqrt{3}+2)\right)$ — 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio — 12

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data:		2013
Cognome:		
Nome:		
Matricola:		
Fila:	D	

6. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC — 4

7. $-1 < \alpha < 2$ — 4

8. $y(x) = 2\sin(2x) + x\sin(2x)$ — 5

9. $\frac{1}{20}\left(\frac{\pi}{3} + \ln(\sqrt{3}+2)\right)$ — 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio — 12

(5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-3x}\sqrt[3]{1+6x} - e^{x}\sqrt{1-4x}}{\ln(1-2x)+2x}$ Usiamo Taylor (al II ordine)

$e^{-3x} = 1-3x+\dfrac{(-3x)^2}{2}+o(x^2) = 1-3x+\dfrac{9}{2}x^2+o(x^2)$

$\sqrt[3]{1+6x} = 1+\dfrac{1}{3}6x-\dfrac{1}{9}(6x)^2+o((6x)^2) = 1+2x-4x^2+o(x^2) \Rightarrow$

$e^{-3x}\sqrt[3]{1+6x} = \left(1-3x+\dfrac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1+2x-4x^2+o(x^2)\right) =$

$1+2x-4x^2+o(x^2)-3x-6x^2+o(x^2)+\dfrac{9}{2}(x^2)+o(x^2) =$

$1-x-\dfrac{11}{2}x^2+o(x^2)$

$e^{x} = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$; $\sqrt{1-4x} = 1+\dfrac{1}{2}(-4x)-\dfrac{1}{8}(-4x)^2+o(x^2) = 1-2x-2x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow e^{x}\sqrt{1-4x} = \left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-2x-2x^2+o(x^2)\right) =$

$1-2x-2x^2+o(x^2)+x-2x^2+o(x^2)+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2) =$

$1-x-\dfrac{7}{2}x^2+o(x^2)$ DUNQUE

NUMERATORE $= \left(1-x-\dfrac{11}{2}x^2+o(x^2)\right)-\left(1-x-\dfrac{7}{2}x^2+o(x^2)\right) = -2x^2+o(x^2)$

DENOMINATORE $= \ln(1-2x)+2x = -2x-\dfrac{1}{2}(-2x)^2+o(x^2) = -2x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow$ LIMITE $= \lim_{x\to 0}\dfrac{-2x^2+o(x^2)}{-2x^2+o(x^2)} = 1$

(10) $y' = -\frac{2y}{1+x} + \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ per $-1 < x < 1$ (è chiaro che $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$)

(a) FORMULA RISOLUTIVA: $Q(x) = \frac{-2}{1+x}$, $A(x) := \int_0^x \frac{-2}{1+t}\,dt =$

$$\left[-2\ln|1+t|\right]_0^x = -2\ln(1+x) = \ln\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\left\{y(0) + \int_0^x \frac{(1+t)^2}{(t-1)(t-2)}\,dt\right\} =$$ (facendo la divisione e poi la riduzione in fratti semplici)

$$\frac{1}{(1+x)^2}\left\{y(0) + \int_0^x \left(1 - \frac{4}{t-1} + \frac{9}{t-2}\right)dt\right\} =$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}\left\{y(0) + x - 4\ln|x-1| + 9\ln|x-2| - 9\ln 2\right\} =$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}\left\{c + x + 9\ln(2-x) - 4\ln(1-x)\right\}$$, dove $c = y(0) - 9\ln(2)$

(si noti che si è scelto la determinazione dei moduli per $-1 < x < 1$)

(b)
$$\lim_{x\to -1} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c - 1 + 9\ln(3) - 4\ln(2) > 0 \text{ cioè se } c > \bar{c} \ (\bar{c} = \dots) \\ 0 & \text{se } c = \bar{c} \\ -\infty & \text{se } c < \bar{c} \end{cases}$$

I casi $c > \bar{c}$ e $c < \bar{c}$ sono ovvi; nel caso $c = \bar{c}$ usiamo Hôpital:

(derivando si riottiene l'integrand precedent)

$$\lim_{x \to -1} y(x) = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{(1+x)^2}{(x-1)(x-2)}}{2(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{1+x}{(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} y(x) = +\infty$$

(c) Poniamo $F(x,y) := -\frac{2y}{1+x} + \frac{1}{x^2-3x+2}$. Allora

l'eq. si scrive $y' = F(x,y)$; inoltre (quando $x \in]-1,1[$)

$$F(x,y) > 0 \iff \frac{2y}{1+x} < \frac{1}{x^2-3x+2} \iff y < \frac{1}{2}\frac{1+x}{x^2-3x+2} =: g(x)$$

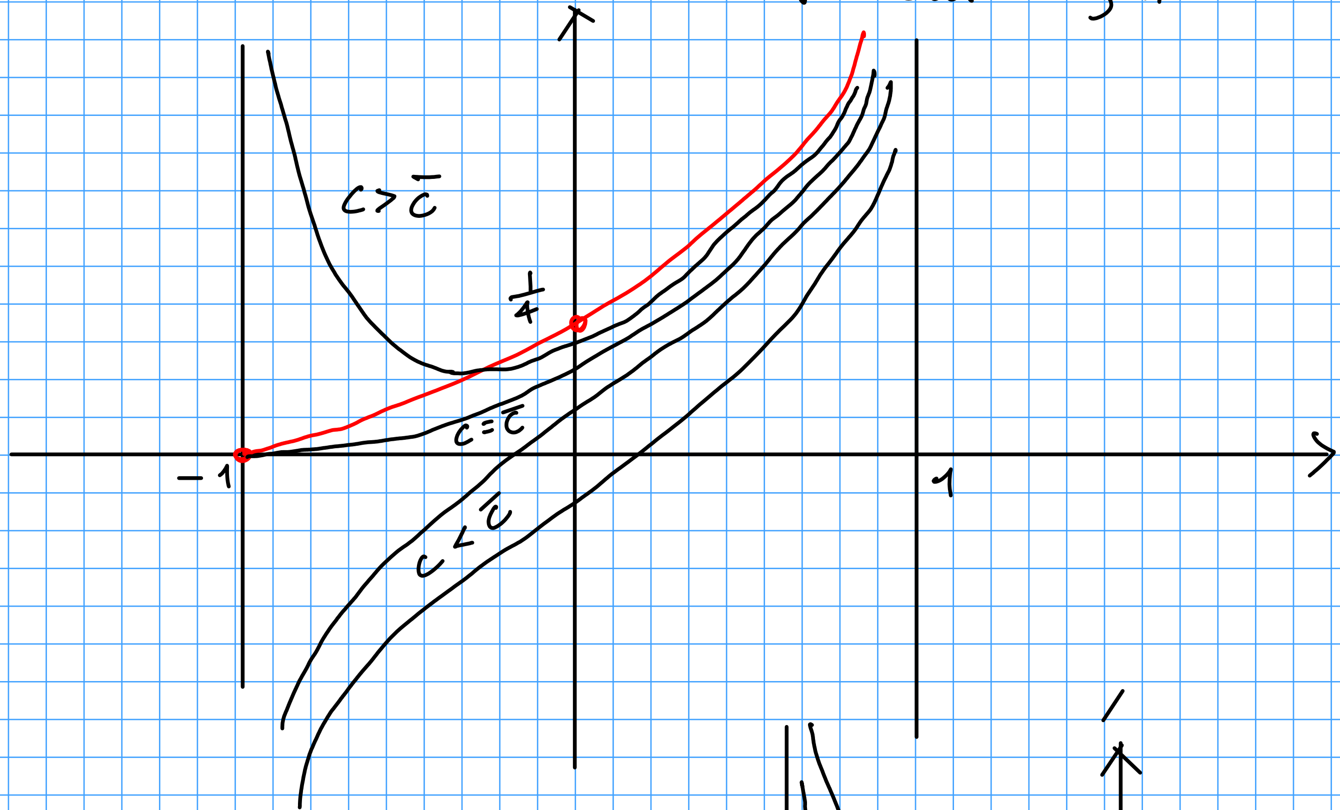
Studiamo $g(x)$ da -1 e 1. Si ha

$g(-1) = 0$, $\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$, $g(0) = \frac{1}{4}$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2-3x+2-(1+x)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{1}{2}\frac{-x^2-2x+5}{(x^2-3x+2)^2}$$

Le radici di $-x^2-2x+5=0$ sono $-1\pm\sqrt{1+6} = -1\pm\sqrt{7}$ e si vede che

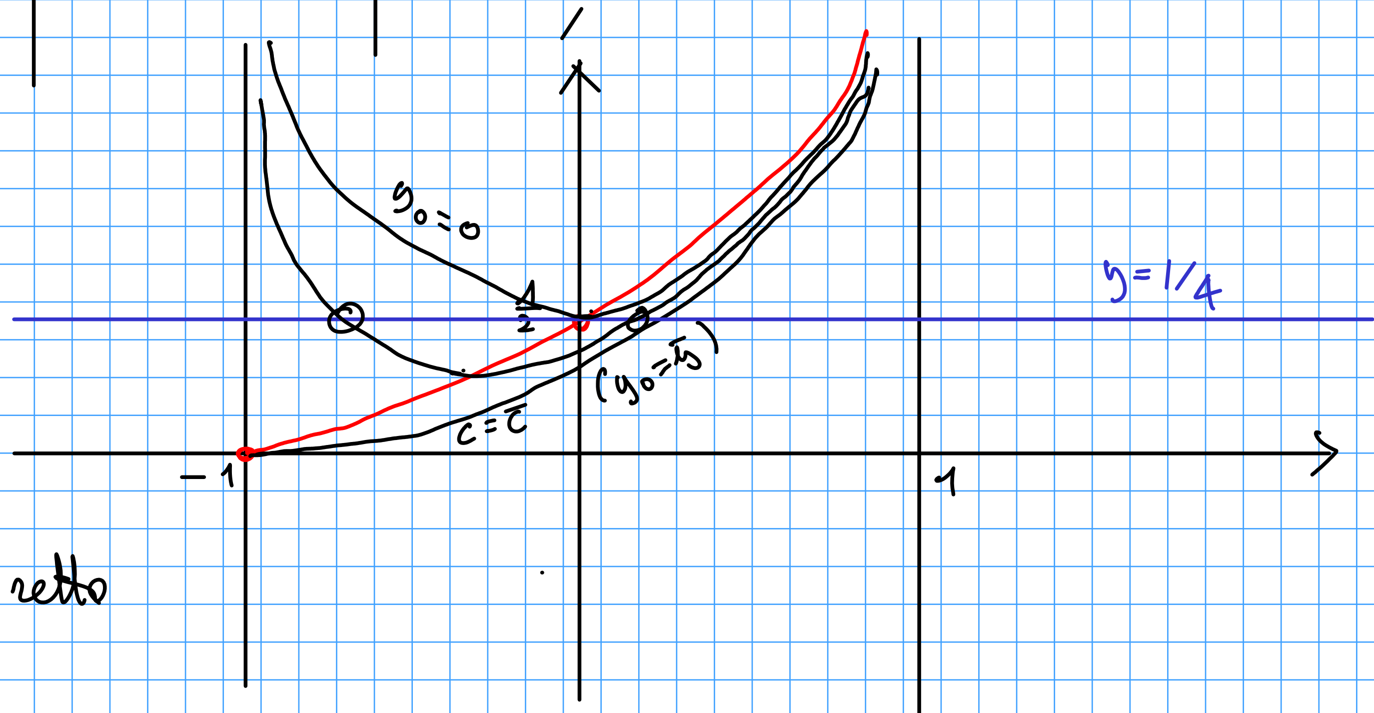
$-1-\sqrt{7} < -1 < 1 < -1+\sqrt{3}$ per cui $g'(x)>0$ se $x\in\,]-1,1[$



DUNQUE I GRAFICI DELLE $y(x)$ sono come nel disegno e $\propto$ (g è la curva rossa)

(d)

Tracciamo la retta $y=1/4$ e vediamo che interseca la g nel punto $(0,1/4)$ allora la soluzione con $y(0)=\frac{1}{4}$ è tangente alla retta (e la incrocia 1 VOLTA)



Si capisce dunque che le curve che tagliano due volte le rette sono quelle con $\bar{y} < y_0 < 0$ dove

$\bar{y}$ è il valore in zero della curva $\bar{y}(x)$ corrispondente e $\bar{C}$.

Dato che $\bar{C} = 1 - 9\ln(3) + 4\ln(2) = \bar{y} - 9\ln(2)$ si ricava

$$1 - 9\ln(3) + 13\ln(2) < y(0) < 0$$

(1) $$f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3} - Ax + Bx^3 = 2\left(1 - \frac{x^3}{8}\right)^{1/3} - Ax + Bx^3 =$$

$$2\left(1 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{8} - \frac{1}{9}\frac{x^6}{64} + o(x^6)\right) - Ax + Bx^3 =$$

$$2 + Ax + \left(B - \frac{1}{12}\right)x^3 - \frac{x^6}{9 \cdot 32} + o(x^6)$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 3!\left(B - \frac{1}{12}\right) = 6B - \frac{1}{2}$$

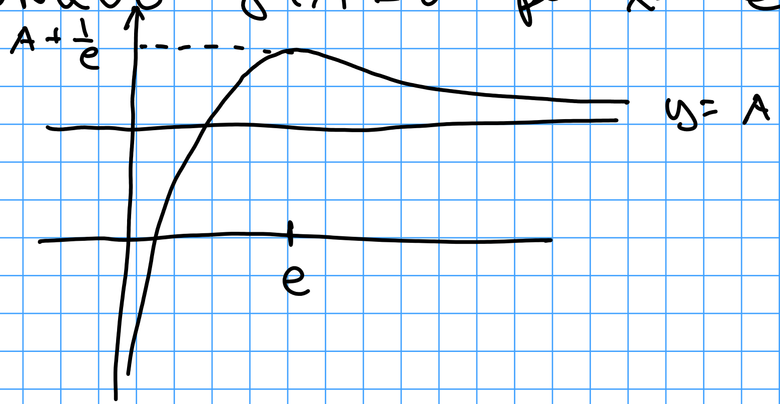
$$f^{VI}(0) = 6!\left(-\frac{1}{9 \cdot 32}\right) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}^{2}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{5}{2}$$

(2) $$f(x) = \frac{Ax + \ln(x)}{x} = A + \frac{\ln(x)}{x}.$$ Allora

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

DUNQUE $f'(x) = 0$ per $x = e$; inoltre $f'(x) > 0$ (<0) per $x < e$ $(x > e)$

$\Rightarrow$



ALLORA $\inf_{x>0} f = -\infty$

$\sup_{x>0} f = f(e) = A + \dfrac{1}{e}$

(3) $f(x) = A + Bx + x e^{x+1}$

Si ha $f(0) = A \Rightarrow f^{-1}(A) = 0$

$f'(x) = B + e^{x+1} + x e^{x+1} \Rightarrow f'(0) = B + e$ e in definitivo

$$f^{-1}(A) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{B+e}$$

(4)(a)

$$n\left(\sqrt[5]{\frac{n^2+An+C}{n^2-Bn+D}} - 1\right) = n\left(\sqrt[5]{1 + \frac{(A+B)n + C - D}{n^2 - Bn + D}} - 1\right) =$$

$$n\left(\frac{1}{5}\,\frac{(A+B)n+C-D}{n^2-Bn+D}\,(1+o(1))\right)\longrightarrow \frac{A+B}{5}$$

(b)

$$\frac{C+3^{-n}}{\sqrt[n]{A^n+B^n}}\longrightarrow \frac{C}{\max(A,B)}$$

perché $3^{-n}\to 0$ e $\sqrt[n]{A^n+B^n} = \max(A,B)\underbrace{\sqrt[n]{1+\left(\frac{\min(A,B)}{\max(A,B)}\right)^n}}_{\text{tende a } 1}$

(6) (b) $\displaystyle\sum_n \underbrace{\frac{n(-3)^n}{An^k+n!}}_{a_n}$ Passando ai moduli si ha $|a_n|\sim \dfrac{n\,3^n}{n!} =: b_n$

Applicando il rapporto a b_n: $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{(n+1)3^{n+1}}{(n+1)!}\,\dfrac{n!}{n\,3^n}=\dfrac{3}{n}\to 0$

DUNQUE $\sum_n b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_n |a_n|$ conv $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ CONV. ASS.

(a) $\displaystyle\sum_n \underbrace{\frac{A-(-1)^n n^2}{n^3+Bn+C}}_{a_n}$

Passando ai moduli si ho $|a_n|\sim \dfrac{n^2}{n^3}=\dfrac{1}{n}\Rightarrow \sum_n |a_n|$ diverge

Però scrivendo $a_n=\dfrac{A}{n^3+Bn+C}+(-1)^n\dfrac{n^2}{n^3+Bn+C}$, chiamando c_n s'è primo addendo e d_n il secondo si vede che $c_n \geq 0$, $c_n \sim \frac{1}{n^3}$, da cui $\sum_n c_n$ converge e $\sum d_n$ è una serie a segni alterni che verifica il criterio di Leibniz. DUNQUE

$\sum a_n$ CONVERGE, MA NON ASSOLUTAMENTE

(7) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \arctan(x)}{x^\alpha (1+x^k)}\, dx$$ Pongo $f(x) = \frac{x^2 + \arctan(x)}{x^\alpha (1+x^k)}$

Ricordiamo che $\arctan(x) \sim x$ per $x \to 0$ e $\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$ DUNQUE

SE $x \to 0$ $$f(x) = \frac{x^2 + x + o(x)}{x^\alpha (1 + o(1))} = \frac{x + o(x)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

e quindi $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge $\iff \alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$

SE $x \to +\infty$ $$f(x) = \frac{x^2 + O(1)}{x^\alpha (o(x^k) + x^k)} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^{\alpha+k} + o(x^{\alpha+k})} \sim \frac{1}{x^{\alpha+k-2}}$$

e quindi $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \alpha + k - 2 > 1 \iff \alpha > 3 - k$

IN DEFINITIVA $\int_0^{+\infty} f(x)$ CONVERGE $\iff \boxed{3-k < \alpha < 2}$

(8) $\quad y'' + 4X = 4\cos(2x)$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 + 4$, che ha radici $\pm 2i$.

Dunque le soluzioni dell'omogenea sono $\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$

Dato che il termine noto è sol. dell'omogenea cerco una sol. particolare del tipo $\bar{y}(x) = X(\gamma \cos(2x) + \delta \sin(2x))$. Facendo i calcoli si trova $\gamma = 0 \quad \delta = 1$, cioè $\bar{y}(x) = X \sin(2x)$.

[in effetti se $\bar{y}(x) = x\sin(2) \Rightarrow \bar{y}'(x) = \sin(2x) + 2x\cos(2x)$, $\bar{y}'' = 4\cos(2x) - 4x\sin(2x)$

$\Rightarrow \bar{y}'' + 4\bar{y} = 4\cos(2x) - 4x\sin(2x) + 4x\sin(2x) = 4\cos(2x)$]. DUNQUE

la sol. generale è $y(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x) + X\sin(x)$

$\Rightarrow \quad \alpha = y(0) \qquad \beta = \dfrac{y'(0)}{2}$ e usando queste

informazioni si può scrivere la sol. del problema di Cauchy

(g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3A}}^{\frac{\pi}{2A}} \frac{\tan^2(Ax)}{\tan^2(Ax)-1}\,dx$ Pongo $y=\tan(Ax) \Rightarrow$

$$x=\frac{1}{A}\arctan(y) \Rightarrow dx=\frac{1}{A}\frac{dy}{1+y^2}$$

$$=\frac{1}{A}\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{y^2}{(y^2+1)(y^2-1)}\,dy=\frac{1}{A}\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\left(\frac{a\,y+b}{y^2+1}+\frac{c}{y-1}+\frac{d}{y+1}\right)dy$$

FACENDO I CONTI TROVO LA CONDIZIONE

$$y^2=(a\,y+b)(y^2-1)+c(y^2+1)(y+1)+d(y^2+1)(y-1) \iff$$

$$\begin{cases} a+c+d=0 \\ b+c-d=1 \\ -a+c+d=0 \\ -b+c-d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+c+d=0 & (\mathrm{I}) \\ b+c-d=1 & (\mathrm{II}) \\ c+d=0 & (\mathrm{I}+\mathrm{III})/2 \\ 2c-2d=1 & (\mathrm{II}+\mathrm{IV}) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a=-c-d \\ b=1-c+d \\ c=-d \\ -4d=1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} d=-1/4 \\ c=1/4 \\ a=0 \\ b=1/2 \end{array} \Rightarrow \text{L'INTEGRALE DIVENTA}$$

$$\frac{1}{A}\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{y-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{y+1}\right)dy=\frac{1}{2A}\left[\arctan(y)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_{\sqrt{3}}^{+\infty}=$$

$$\frac{1}{2A}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\underbrace{\ln(1)}_{=0}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{2A}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\right)=\frac{1}{2A}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}\right)=$$

$$\frac{1}{2A}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)\right)=\frac{1}{2A}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\right)$$