Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 28 giugno 2013. **FILA A**

PRIMA PARTE————————————————————————-

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{8+x^3} + 2x + 3x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Data la funzione
$$f(x) := 4\frac{\sqrt{1-x}}{x-2} + 5$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\min f(x)$, (b) $\max f(x)$. (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).

3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 2 + 3x + xe^x$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(2)$ (4 p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{\frac{n+3}{n-4}} - 1\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{5+3^{-n}}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-4x}}{\ln(1+x) - x}$$

SECONDA PARTE————————————————————————-

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4n^3+n!} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n+4}{n^2-2n+3}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^2-e^{-x-5x^3}}{x^\alpha(1+x^3)}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 5e^x \\ y(0) = 3, y'(0) = -1 \end{cases}$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4e^{2x}+6e^x}{(e^{2x}+9)^2}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{5y}{5x+6} = \frac{1}{x^2+5x+6} \qquad x > -6/5.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
    (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -6/5$ e per $x \to \infty$ (al variare della suddetta C), specificando anche se $y(x)$ tende a tali limiti da sopra ($y(x) \to l^+$) o da sotto ($y(x) \to l^-$) (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
    (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $10y(x) = 1$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI SOLO I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 (PRIMA PARTE) E 6,7,8,9 (SECONDA PARTE) CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 (6-9) SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 28 giugno 2013. **FILA B**

PRIMA PARTE——————————————————————————-

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{8+x^3} + 3x + 2x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.
2. Data la funzione
$$f(x) := 3\frac{\sqrt{1-x}}{x-2} + 4$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\min f(x)$, (b) $\max f(x)$. (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).
3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 3 + 2x + xe^x$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(3)$ (4 p.).
4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{\frac{n+2}{n-3}} - 1\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n+2^n}}{4+3^{-n}}.$$
5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-4x}}{\ln(1+x) - x}$$

SECONDA PARTE——————————————————————————-

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3n^2+n!} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n+3}{n^2-3n+2}$$
7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^2-e^{-x-4x^3}}{x^{\alpha}(1+x^2)}\,dx$$
8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 5e^x \\ y(0) = 1, y'(0) = 4 \end{cases}$$
9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3e^{2x}+6e^x}{(e^{2x}+9)^2}\,dx$$
10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{5y}{5x+6} = \frac{1}{x^2+5x+6} \qquad x > -6/5.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
    (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -6/5$ e per $x \to \infty$ (al variare della suddetta C), specificando anche se $y(x)$ tende a tali limiti da sopra ($y(x) \to l^+$) o da sotto ($y(x) \to l^-$) (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
    (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $10y(x) = 1$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI SOLO I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 (PRIMA PARTE) E 6,7,8,9 (SECONDA PARTE) CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 (6-9) SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 28 giugno 2013. **FILA C**

PRIMA PARTE——————————————————————————-

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{8+x^3} + 4x + 5x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.
2. Data la funzione
$$f(x) := 2\frac{\sqrt{1-x}}{x-2} + 3$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\min f(x)$, (b) $\max f(x)$. (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).
3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 4 + 5x + xe^x$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(4)$ (4 p.).
4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{\frac{n+5}{n-2}} - 1\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4^n+5^n}}{3+3^{-n}}.$$
5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-4x}}{\ln(1+x) - x}$$

SECONDA PARTE——————————————————————————-

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2n^5 + n!} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n + 2}{n^2 - 4n + 5}$$
7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{1 + x^2 - e^{-x-3x^3}}{x^\alpha (1+x^5)}\, dx$$
8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 5e^x \\ y(0) = 4, y'(0) = -2 \end{cases}$$
9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{2x} + 6e^x}{(e^{2x}+9)^2}\, dx$$
10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{5y}{5x+6} = \frac{1}{x^2+5x+6} \qquad x > -6/5.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
    (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -6/5$ e per $x \to \infty$ (al variare della suddetta C), specificando anche se $y(x)$ tende a tali limiti da sopra ($y(x) \to l^+$) o da sotto ($y(x) \to l^-$) (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
    (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $10y(x) = 1$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI SOLO I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 (PRIMA PARTE) E 6,7,8,9 (SECONDA PARTE) CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 (6-9) SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 28 giugno 2013. **FILA D**

PRIMA PARTE——————————————————————————-

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{8+x^3} + 5x + 4x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.
2. Data la funzione
$$f(x) := 5\frac{\sqrt{1-x}}{x-2} + 2$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\min f(x)$, (b) $\max f(x)$. (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).
3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 5 + 4x + xe^x$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(5)$ (4 p.).
4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{\frac{n+4}{n-5}} - 1\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5^n + 4^n}}{2 + 3^{-n}}.$$
5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-4x}}{\ln(1+x) - x}$$

SECONDA PARTE——————————————————————————-

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{5n^4 + n!} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n + 5}{n^2 - 5n + 4}$$
7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{1 + x^2 - e^{-x-2x^3}}{x^\alpha(1+x^4)}\, dx$$
8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 5e^x \\ y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{cases}$$
9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5e^{2x} + 6e^x}{(e^{2x} + 9)^2}\, dx$$
10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{5y}{5x+6} = \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \qquad x > -6/5.$$
   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
   (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to -6/5$ e per $x \to \infty$ (al variare della suddetta C), specificando anche se $y(x)$ tende a tali limiti da sopra ($y(x) \to l^+$) o da sotto ($y(x) \to l^-$) (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
   (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $10y(x) = 1$ ha due radici (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI SOLO I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 (PRIMA PARTE) E 6,7,8,9 (SECONDA PARTE) CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 (6-9) SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

1. (a) $\frac{37}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ 4

2. (a) 3 (b) 5 4

3. $\frac{1}{4}$ 4

4. (a) $\frac{7}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ 8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

1. (a) $\frac{25}{2}$	(b) $-\frac{5}{2}$		4
2. (a) $\frac{5}{2}$	(b) 4		4
3. $\frac{1}{3}$			4
4. (a) 1	(b) $\frac{3}{4}$		8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

1. (a) $\frac{61}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ 4

2. (a) 2 (b) 3 4

3. $\frac{1}{6}$ 4

4. (a) $\frac{7}{5}$ (b) $\frac{5}{3}$ 8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

1. (a) $\frac{49}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ 4

2. (a) $-\frac{1}{2}$ (b) 2 4

3. $\frac{1}{5}$ 4

4. (a) $\frac{9}{5}$ (b) $\frac{5}{2}$ 8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

6. (a) ~~AC~~ | C | NC   (b) AC | ~~C~~ | NC 4

7. $0 < \alpha < 2$ 4

8. $2e^{-x}\cos(x) + e^{x}$ 5

9. $\dfrac{4+\pi}{18}$ 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 12

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: | | 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

6. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC 4

7. $1 < \alpha < 2$ 4

8. $3e^{-x}\sin(x) + e^{x}$ 5

9. $\dfrac{3+\pi}{18}$ 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 12

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

6. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC 4

7. $-2 < \alpha < 2$ 4

8. $3e^{-x}\cos(x) + e^{x}$ 5

9. $\frac{2+\pi}{18}$ 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 12

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

6. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC 4

7. $-1 < \alpha < 2$ 4

8. $2e^{-x}\sin(x) + e^{x}$ 5

9. $\dfrac{5+\pi}{18}$ 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 12

(5) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-4x}}{\ln(1+x) - x}$$

Usiamo Taylor. Dagli sviluppi "notevoli" segue che

$$e^{y} = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad ; \quad \sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2)$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2), \quad \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Ne segue:

$$e^{-x}\sqrt[3]{1-3x} = \left(1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2)\right)\left(1 + \frac{1}{3}(-3x) - \frac{1}{9}(-3x)^2 + o((-3x)^2)\right)$$

$$= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x - x^2 + o(x^2)\right) =$$

$$\left(1 - x - x^2 + o(x^2) - x + x^2 + o(x^2) + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$1 - 2x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt{1-4x} = 1 + \frac{1}{2}(-4x) - \frac{1}{8}(-4x)^2 + o((-4x)^2) = 1 - 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

DUNQUE L'ARGOMENTO DEL LIMITE È

$$\frac{\cancel{1}-\cancel{2x}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(\cancel{1}-\cancel{2x}-2x^2+o(x^2)\right)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\frac{\frac{5}{2}x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\to -5$$

(10) $$y'+\frac{5y}{5x+6}=\frac{1}{x^2+5x+6}\qquad x>-\frac{6}{5}$$

(a) Applichiamo la formula risolutiva:

$$A(x)=-\int_0^x\frac{5}{5t+6}\,dt=-\left[\ln(5t+6)\right]_0^x=\ln\left(\frac{5}{5x+6}\right)$$

Ne segue, chiamando y_0 il valore $y(0)$,

$$y(x)=\frac{5}{5x+6}\left(y_0+\int_0^x\frac{5t+6}{5(t^2+5t+6)}\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{5x+6}\left(5y_0+\int_0^x\frac{5t+6}{(t+2)(t+3)}\,dt\right)=\frac{1}{5x+6}\left(5y_0+\int_0^x\left(\frac{9}{t+3}-\frac{4}{t+2}\right)dt\right)$$

$$=\boxed{\frac{1}{5x+6}\left(c+9\ln(x+3)-4\ln(x+2)\right)}$$

dove $\underline{c=5y_0-9\ln 3+4\ln 2}=5y_0+\ln\frac{2^4}{3^9}$

(b) • $$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\left(\text{Hôpital per la forma }\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{9}{x+3}-\frac{4}{x+2}}{5}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5}\,\frac{5x+6}{x^2+5x+6} = 0^+$$

- $$\lim_{x\to -\frac{6}{5}} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > \bar{c} := 4\ln\left(2-\frac{6}{5}\right) - 9\ln\left(3-\frac{6}{5}\right) \\ 0^+ & \text{se } c = \bar{c} \\ -\infty & \text{se } c = \bar{c} \end{cases}$$

$$= 4\ln\left(\frac{4}{5}\right) - 9\ln\left(\frac{9}{5}\right) = \ln\left(\frac{4^4}{5^4}\,\frac{5^9}{9^9}\right) = \ln\left(\frac{4^4\,5^5}{9^9}\right)$$

I casi con $c > \bar{c}$ / $c < \bar{c}$ sono evidenti. Nel caso $c = \bar{c}$ usando Hopital (per la forma $0/0$) si ha

$$\lim_{x\to -\frac{6}{5}^+} y(x) = \lim_{x\to -\frac{6}{5}^+} \frac{\frac{5x+6}{x^2+5x+6}}{5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{6}{5}\right)^2+5\left(-\frac{6}{5}\right)+6}\cdot 0^+$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 0^+ = 0^+$$

NOTIAMO CHE $c = \bar{c} \iff$
$5y_0 + \ln\frac{2^4}{3^9} = \ln\frac{4^4 5^5}{9^9} \iff y_0 = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{2^4\,5^5}{3^9}\right) =: \bar{y}_0$
e $\bar{y}_0 > 0$

(c) Per la monotonia e i grafici consideriamo

$$F(x,y) := -\frac{5y}{5x+6} + \frac{1}{x^2+5x+6}$$

di modo che l'equazione si scrive come $y' = F(x,y)$.

Si ha $F(x,y) > 0$ (per $x > -\frac{6}{5}$) $\iff y < \frac{1}{5}\,\frac{5x+6}{x^2+5x+6} =: g(x)$

e analogamente $F(x,y) \underset{(=)}{<} 0 \iff y \underset{(=)}{>} g(x)$. Studiamo $g(x)$

$g(-6/5) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0^+$

$$g'(x) = \frac{5(x^2+5x+6) - (5x+6)(2x+5)}{5(x^2+5x+6)^2} = \frac{-5x^2-12x}{5(x^2+5x+6)^2}$$

Dunque $g'(x) = 0 \iff x = 0$ (o $x = -\frac{12}{5} < -\frac{6}{5}$ NON INTERESSA)

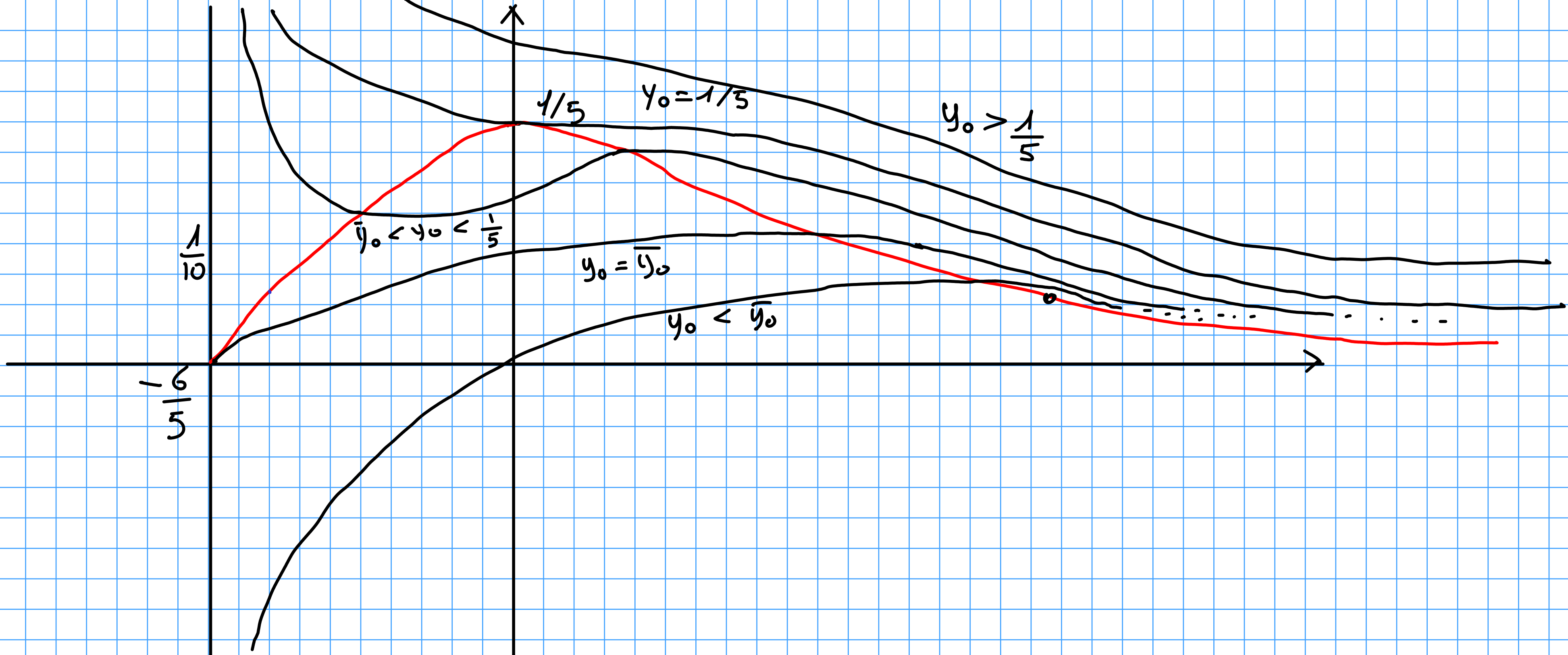
e $g(0) = \frac{1}{5}$. Tracciando il grafico di g (rosso)

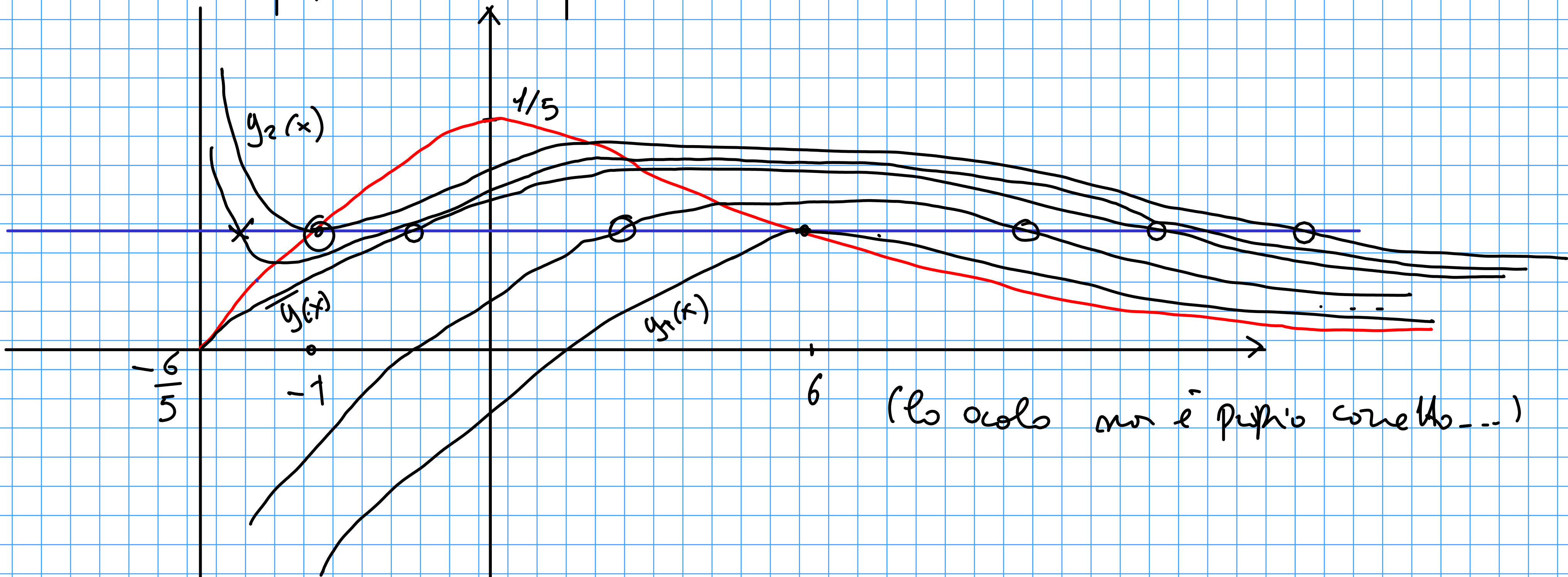
si trova l'andamento della $y(x)$, dato che $y(x)$

CRESCE (DECRESCE) dove $y(x) < g(x)$ $(> g(x))$.

(d) Per individuare le soluzioni di $y(x) = \frac{1}{10}$ cerchiamo le sol. dell'equazione $g(x) = \frac{1}{10}$ (le intersezioni tra $y = \frac{1}{10}$ - retta in blu - e la curva $y = g(x)$). Si ha

$$\frac{5x+6}{5(x^2+5x+6)} = \frac{1}{10} \iff \frac{-x^2+5x+6}{5(x^2+5x+6)} = 0 \iff x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} = \frac{5 \mp 7}{2} = \begin{cases} 6 \\ -1 \end{cases}$$





(lo scalo non è proprio corretto...)

Dunque, guardando i grafici, $y(x)$ incontra due volte la retta $y = \frac{1}{10}$, per tutte le $y(x)$ comprese tra $\bar{y}(x)$ e $y_1(x)$ dove $\bar{y}(x)$ è la soluzione che tende a zero in $\frac{-6}{5}$,

cioè quella con $y_0 = \bar{y}_0$, e y_1 è la curva per cui $y_1(6) = \frac{1}{10}$.

$\bar{y}$ COMPRESA y_1 ESCLUSA

Oltre a queste c'è $y_2(x)$, dove y_2 è la sol. con $y_2(-1) = \frac{1}{10}$

RISOLVENDO SI POSSONO RICAVARE I VALORI DI c / y_0 che individuano y_1 e y_2, chiamiamoli y_{01} e y_{02}.

ALLORA LA RISPOSTA È $y_{01} < y_0 \leq \bar{y}$ e $y_0 = y_{02}$

(1)
$$f(x) = \sqrt[3]{8+x^3} + Ax + Bx^3 = 2\sqrt[3]{1+\frac{x^3}{8}} + Ax + Bx^3$$
$$= (\text{Taylor})\ 2\left(1 + \frac{1}{3}\frac{x^3}{8} - \frac{1}{9}\left(\frac{x^3}{8}\right)^2 + o((x^3)^2)\right) + Ax + Bx^3 =$$

$$2 + Ax + \left(\frac{1}{12} + B\right)x^3 - \frac{x^6}{32 \cdot 9} + o(x^6)$$

DUNQUE $\frac{1}{12} + B = \frac{f'''(0)}{3!} \iff f'''(0) = \boxed{\frac{1}{2} + 6B}$

$$-\frac{1}{32 \cdot 9} = \frac{f^{VI}(0)}{6!} \iff f^{IV}(0) = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

(2) $f(x) = A\frac{\sqrt{1-x}}{x-2} + B$. DOMINIO $= x \leq 1$

$f(1) = B$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \cdot 0 + B = B$

$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{1-x}\,(x-2)^2}$. $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ($x=0$ pt. di minimo)

$f(0) = B - \frac{A}{2}$

$\rightarrow$ MAX $f = f(1) = B$, MIN $f(x) = f(0) = B - \frac{A}{2}$

(3) $f(x) = A + Bx + xe^x$. Allora

$f(0) = A$, $f'(x) = B + (1+x)e^x$, $f'(0) = B + 1$

NE SEGUE $f^{-1}(A) = 0$ $\quad (f^{-1})'(A) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{B+1}$

(4) (a)

$$n\left(\sqrt[5]{\frac{n+A}{n-B}} - 1\right) = n\left(\sqrt[5]{1+\frac{A+B}{n-B}} - 1\right) =$$

$$n\left(1 + \frac{1}{5}\,\frac{A+B}{n-B} + o\left(\frac{A+B}{n-B}\right) - 1\right) = \frac{A+B}{5}\left(\frac{n}{n-B}\right) + o\left(\frac{n}{n-B}\right) \to \boxed{\frac{A+B}{5}}$$

(b)
$$\frac{\sqrt[n]{A^n + B^n}}{C + 3^{-n}} = \max(A,B)\,\frac{\sqrt[n]{1+o(1)}}{C+3^{-n}} \to \boxed{\frac{\max(A,B)}{C}}$$

(6) (a) $\displaystyle\sum_n \frac{(-A)^n}{Bn^3 + n!}$. Pongo $a_n := \dfrac{(-A)^n}{Bn^3+n!}$

allora $|a_n| = \dfrac{A^n}{Bn^3+n!} = \dfrac{A^n}{n!}\,\dfrac{1}{\frac{Bn^3}{n!}+1} = \dfrac{A^n}{n!}(1+o(1)) \simeq \dfrac{A^n}{n!}$

È noto (si usi per es. il crit. del rapporto) che $\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ co

qualunque sia A $\Rightarrow$ la serie $\displaystyle\sum_n a_n$ $\boxed{\text{CONV. ASSOLUTAM.}}$

(6) $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n n + A}{n^2 + Bn + C} = \sum (-1)^n a_n + b_n$ dove

$a_n = \dfrac{n}{n^2+Bn+C}$ $\quad b_n = \dfrac{A}{n^2+Bn+C}$ . . . È chiaro che

$a_n \simeq \dfrac{1}{n}$ e $b_n \simeq \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \sum a_n$ DIVERGE e $\sum b_n$ CONV.

$$\left|(-1)^n a_n + b_n\right| = a_n \left|(-1)^n + \frac{b_n}{a_n}\right| = a_n\,(1+o(1)) \simeq a_n$$

e quindi $\sum \left|(-1)^n a_n + b_n\right|$ NON è ASS. CONV.

Però $\displaystyle\sum_n \left((-1)^n a_n + b_n\right) = \sum_n (-1)^n a_n + \sum b_n$

La prima serie converge per Leibniz, la seconda converge assolutamente e quindi

$\displaystyle\sum_n \left((-1)^n a_n + b_n\right)$ CONVERGE, MA NON ASSOLUTAMENTE

(7) $$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1+x^2 - e^{-x-5x^2}}{x^\alpha (1+x^k)}}_{f(x)}\, dx$$

se $x \to 0$ $$f(x) = \frac{x^2 + 1 - (1 - x + o(x))}{x^\alpha (1 + o(1))} =$$

$$\frac{x + o(x)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} \simeq \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}} .$$

Ne segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 2}$

se $x \to +\infty$ $$f(x) = \frac{x^2 + o(1)}{x^\alpha (x^k + o(x^k))} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^{\alpha+k} + o(x^{\alpha+k})} \simeq \frac{x^2}{x^{\alpha+k}} = \frac{1}{x^{\alpha+k-2}}$$

Ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha + k - 2 > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 3-k}$

(8) $$y'' + 2y' + 2y = 5e^x$$

Il pol. caratteristico è $P(z) = z^2 + 2z + 2$ che ha radici $-1 \pm i$, quindi le soluzioni dell'omogenea sono

$$y_0(x) = e^{-x}(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x))$$

Dato che 1 non è radice di P possiamo cercare una sol. del tipo $\bar{y}(x) = \gamma e^x$. Facendo i calcoli

$\bar{y}(x) = \bar{y}'(x) = \bar{y}''(x) = \gamma e^x \Rightarrow$

$\bar{y}''(x) + 2\bar{y}'(x) + 2\bar{y}(x) = 5\gamma e^x \Rightarrow \gamma = 1.$

DUNQUE LA SOL. GENERALE DELL' EQ. È DATA DA

$$y(x) = \underline{e^{-x}(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)) + e^x} \Rightarrow y(0) = \alpha + 1$$

da cui $y'(x) = -e^{-x}(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)) + e^{-x}(-\alpha \sin(x) + \beta \cos(x))$
$+ e^x \Rightarrow y'(0) = -\alpha + \beta + 1$

e quindi

$$\alpha = y(0) - 1$$

$$\beta = y'(0) + y(0) - 2$$

che, utilizzando i valori dati di $y'(0)$ e $y(0)$, permette di trovare α e β

(g) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A e^{2x} + 6 e^x}{(e^{2x} + 9)^2} \, dx = \left(e^x = y \leftrightarrow e^x dx = dy\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{A y + 6}{(y^2 + 9)^2} \, dx = A \int_0^{+\infty} \frac{y}{(y^2+9)^2} \, dy + 6 \int \frac{dy}{(y^2+9)^2}$$

Si ha:

$$\int_0^{+\infty} \frac{y}{(y^2+9)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{y^2+9}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+9)^2} = \frac{1}{9}\int_0^{+\infty}\frac{9\,dy}{(y^2+9)^2} = \frac{1}{9}\int_0^{+\infty}\frac{9+y^2}{(y^2+9)^2}\,dy - \frac{1}{9}\int_0^{+\infty}\frac{y^2\,dy}{(y^2+9)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(y^2+9)} - \frac{1}{9}\int_0^{+\infty} y\,\frac{y}{(y^2+9)^2}\,dy = \text{(il secondo per parti)}$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{y^2+9} - \frac{1}{18}\left[y\,\frac{(-1)}{(y^2+9)}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{18}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{y^2+9} =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{y^2+9} - 0 = \frac{1}{18}\,\frac{1}{9}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(\frac{y}{3}\right)^2+1} =$$

$$\frac{1}{18\cdot 9}\left[3\arctan\left(\frac{y}{3}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{18\cdot 9}\cdot 3\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{36\cdot 3} = \frac{\pi}{108}$$

IN DEFINITIVA L'INTEGRALE FA $\frac{A}{18} + \frac{6\pi}{108} = \frac{A+\pi}{18}$