Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 7 giugno 2013. **FILA A**

PRIMA PARTE——————————————————————————-

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{1+x^3} + 2x + 3x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Data la funzione
$$f(x) := 4\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} + 5$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\max f(x)$, (b) $\min f(x)$. (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).

3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 2 + 3x + \sin(x)$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(2)$ (4 p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+3}{n-4}\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n! + 3^n}}{n}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{8+7x^4}}{\cos(x^2) - 1}$$

SECONDA PARTE——————————————————————————-

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n + 1}{4 + 3^n + n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + (3n)!}{1 + (2n)!}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + \ln(1 + x + 3x^2)}{x^{\alpha}(1 + x^3)}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = -3e^{-x} \\ y(0) = 2, y'(0) = 2 \end{cases}$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 4)^2}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{xy}{x^2 + 1} = \frac{x - 1}{1 + x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
    (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (al variare della suddetta C), specificando anche se $y(x)$ tende a tali limiti da sopra ($y(x) \to l^+$) o da sotto ($y(x) \to l^-$) (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
    (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 7 giugno 2013. **FILA B**

PRIMA PARTE——————————————————————-

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{1+x^3} + 3x + 2x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.
2. Data la funzione
$$f(x) := 3\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} + 4$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\max f(x)$, (b) $\min f(x)$. (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).
3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 3 + 2x + \sin(x)$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(3)$ (4 p.).
4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+2}{n-3}\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3n! + 2^n}}{n}.$$
5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{8+7x^4}}{\cos(x^2) - 1}$$

SECONDA PARTE——————————————————————-

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n + 1}{3 + 2^n + n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + (2n)!}{1 + (3n)!}$$
7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + \ln(1 + x + 3x^2)}{x^\alpha(1+x^2)}\, dx$$
8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = -3e^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = -2 \end{cases}$$
9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 4)^2}\, dx$$
10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{xy}{x^2+1} = \frac{x-1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
    (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (al variare della suddetta C), specificando anche se $y(x)$ tende a tali limiti da sopra ($y(x) \to l^+$) o da sotto ($y(x) \to l^-$) (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
    (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 7 giugno 2013. **FILA C**

PRIMA PARTE————————————————————————-

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{1+x^3} + 4x + 5x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Data la funzione
$$f(x) := 2\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} + 3$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\max f(x)$, (b) $\min f(x)$. (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).

3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 4 + 5x + \sin(x)$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(4)$ (4 p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+5}{n-2}\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4n! + 5^n}}{n}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{8+7x^4}}{\cos(x^2) - 1}$$

SECONDA PARTE————————————————————————-

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n + 1}{2 + 5^n + n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + (5n)!}{1 + (4n)!}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + \ln(1 + x + 3x^2)}{x^\alpha(1 + x^5)}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = -3e^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 4 \end{cases}$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 4)^2}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{xy}{x^2+1} = \frac{x-1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
    (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (al variare della suddetta C), specificando anche se $y(x)$ tende a tali limiti da sopra ($y(x) \to l^+$) o da sotto ($y(x) \to l^-$) (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
    (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 7 giugno 2013. **FILA D**

PRIMA PARTE——————————————————-

1. Sia $f(x) := \sqrt[3]{1+x^3} + 5x + 4x^3$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.
2. Data la funzione
$$f(x) := 5\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} + 2$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\max f(x)$, (b) $\min f(x)$. (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).
3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 5 + 4x + \sin(x)$ si calcoli il valore di $(f^{-1})'(5)$ (4 p.).
4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+4}{n-5}\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5n! + 4^n}}{n}.$$
5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{8+7x^4}}{\cos(x^2) - 1}$$

SECONDA PARTE——————————————————-

6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n + 1}{5 + 4^n + n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + (4n)!}{1 + (5n)!}$$
7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + \ln(1 + x + 3x^2)}{x^\alpha (1 + x^4)}\, dx$$
8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):
$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = -3e^{-x} \\ y(0) = -2, y'(0) = 0 \end{cases}$$
9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 4)^2}\, dx$$
10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{xy}{x^2+1} = \frac{x-1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
    (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (al variare della suddetta C), specificando anche se $y(x)$ tende a tali limiti da sopra ($y(x) \to l^+$) o da sotto ($y(x) \to l^-$) (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
    (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

33

voto

Data:	2013
Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila:	A

1. (a)	20	(b)	−80	4
2. (a)	9	(b)	5	4
3.	$\frac{1}{4}$			4
4. (a)	7	(b)	1/e	8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

33

voto

Data: [ ][ ] [ ][ ] 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

1. (a)	14	(b)	−80	4
2. (a)	7	(b)	4	4
3.	$\frac{1}{3}$			4
4. (a)	5	(b)	1/e	8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

33

voto

Data: | | | | | 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

	(a)	(b)	
1.	32	-80	4
2.	5	3	4
3.	$\frac{1}{6}$		4
4.	7	$1/e$	8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA   PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

33

voto

Data: __ __ / __ __ 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

1. (a)	26	(b)	-80	4
2. (a)	7	(b)	2	4
3.	$\frac{1}{5}$			4
4. (a)	9	(b)	$1/e$	8

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio   13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

33

voto

Data: | | | | | 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

6. (a) $\cancel{\text{AC}}$ | C | NC (b) AC | C | $\cancel{\text{NC}}$ — 4

7. $0 < \alpha < 2$ — 4

8. $y(x) = e^{-x} + e^{2x} + x e^{-x}$ — 5

9. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{32}$ — 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio — 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

33

voto

Data: | | | | 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

6. (a) AC | C | ~~NC~~ (b) ~~AC~~ | C | NC 4

7. $1 < \alpha < 2$ 4

8. $y(x) = e^{-x} - e^{2x} + x e^{-x}$ 5

9. $\frac{3}{8} + \frac{\pi}{32}$ 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

33

voto

Data: | | | | 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

6. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC C ~~NC~~ 4

7. $-2 < \alpha < 2$ 4

8. $y(x) = -e^{-x} + e^{2x} + x\,e^{-x}$ 5

9. $\frac{1}{4} + \frac{\pi}{32}$ 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio 13

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

33
voto

Data:			2013
Cognome:			
Nome:			
Matricola:			
Fila:	D		

6. (a) AC C ~~NC~~ (b) ~~AC~~ C NC — 4

7. $-1 < \alpha < 2$ — 4

8. $y(x) = -e^{-x} - e^{2x} + x e^{-x}$ — 5

9. $\frac{5}{8} + \frac{\pi}{32}$ — 8

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio — 13

1) Se $g(y) = \sqrt[3]{1+y} = (1+y)^{1/3}$, allora, come noto

$$g(y) = 1 + \frac{1}{3} y + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right) y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{y}{3} - \frac{y^2}{9} + o(y^2)$$

Ne segue che $f(x) = g(x^3) + Ax + Bx^3$ (con A, B dipendenti dalla fila)

$$= 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{9} + o(x^6) + Ax + Bx^3$$

$$= 1 + Ax + \left(\frac{1}{3} + B\right)x^3 - \frac{1}{9} x^6 + o(x^6)$$

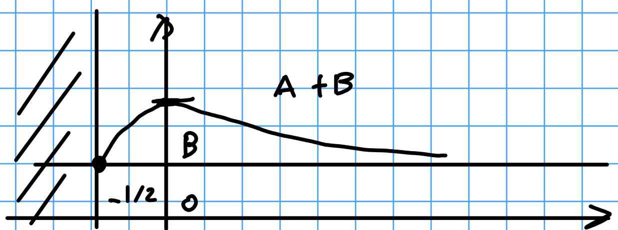
e quindi $f'''(0) = \left(\frac{1}{3} + B\right) \cdot 3! = 2 + 6B$

$$f^{VI}(0) = -\frac{1}{9} \cdot 6! = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 80$$

(2)

$$f(x) = A \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} + B \qquad (A \text{ e } B \text{ dipendono dalla fila})$$

- DOMINIO $= \{x \geq -1/2\}$
- $f(-1/2) = B$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = B$
- $f'(x) = A \dfrac{\frac{2}{2\sqrt{x+1}}(x+1) - \sqrt{2x+1}}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-2x-1}{(x+1)^{5/2}} = \dfrac{-x}{(x+1)^{5/2}}$,

$\Longrightarrow$ 

$\Rightarrow \min f = B$, $\max f = f(0) = A + B$

(3) Se $f(x) = A + Bx + \sin(x) \Rightarrow f(0) = A$, $f'(x) = B + \cos(x)$, $f'(0) = B+1$

Ne segue $f^{-1}(A) = 0$ e allora

$$(f^{-1})'(A) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{B+1}$$

(4) (a)

$$n \ln\left(\frac{n+A}{n-B}\right) = n \ln\left(\frac{n-B+B+A}{n-B}\right) = n \ln\left(1 + \frac{A+B}{n-B}\right)$$

$$\simeq n \frac{A+B}{n-B} \xrightarrow{n \to +\infty} A+B$$

(b)

$$\frac{\sqrt[n]{A\,n! + B^n}}{n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sqrt[n]{A + B^n/n!} \to \frac{1}{e}$$

perché $\frac{B^n}{n!} \to 0 \Rightarrow A + \frac{B^n}{n!} \to A \Rightarrow \sqrt[n]{A + \frac{B^n}{n!}} \to 1$ e

$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \to 1$ come si vede usando Cesaro: posto $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{\cancel{(n+1)}\, n^n}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(6) (a) $\sum_n \frac{(-1)^n A^n + 1}{C + B^n + n}$. Sia $a_n := \frac{(-1)^n A^n + 1}{C + B^n + n}$ (sia A che B sono > 1)

È chiaro che $|a_n| = \frac{A^n}{B^n} \frac{|1 + (-1)^n / A^n|}{\frac{C}{B^n} + 1 + \frac{n}{B^n}} = \frac{A^n}{B^n}(1 + o(1)) \simeq \left(\frac{A}{B}\right)^n$

Ci sono due possibilità:

$\underline{A < B}$ (file A e C) $\Rightarrow |a_n| \simeq \left(\frac{A}{B}\right)^n = \gamma^n$ con $\gamma < 1$

$\Rightarrow \sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge assolutamente

$\underline{A > B}$ (file B e D) $\Rightarrow |a_n| \to +\infty \Rightarrow \{a_n\}$ NON TENDE a zero $\Rightarrow \sum a_n$ non converge

(b) $\sum_n (-1)^n \frac{1 + (An)!}{1 + (Bn)!}$. Poniamo $a_n := (-1)^n \frac{1 + (An)!}{1 + (Bn)!}$

Allora $|a_n| = \frac{1 + (An)!}{1 + (Bn)!} = \frac{(An)!}{(Bn)!}(1 + o(1)) \simeq \frac{(An)!}{(Bn)!} =: c_n$

Applichiamo il criterio del rapporto a $\sum_n c_n$: si ha

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(An + A)!}{(An)!} \frac{(Bn)!}{(Bn + B)!} = \frac{(An+1) \cdots (An + A)}{(Bn+1) \cdots (Bn + B)} = \circledast$

Ci sono anche qui due possibilità:

$\underline{A < B}$ (file B e D): allora $\circledast \to 0$ e dunque

$\sum_n |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge assolutamente

$\underline{A > B}$ (file A e C): allora $\circledast \to +\infty$ da cui $|a_n| \to +\infty$

Ma allora $\{a_n\}$ non tende a zero e dunque $\sum_n a_n$ non converge

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \ln(1+x+3x^2)}{x^\alpha (1+x^k)}$. Poniamo $f(x) := \dfrac{x^2+\ln(1+x+3x^2)}{x^\alpha(1+x^k)}$

- Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{x^2 + x + o(x^2)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} \simeq \dfrac{x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$

DUNQUE $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$

- Per $x \to +\infty$ $f(x) = \dfrac{x^2 + o(x^2)}{x^\alpha(x^k + o(x^k))} \simeq \dfrac{x^2}{x^\alpha x^k} = \dfrac{1}{x^{\alpha+k-2}}$

DUNQUE $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha + k - 2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 3 - k$

IN DEFINITIVA $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow 3 - k < \alpha < 2$

(8)

$$y'' - y' - 2y = -3e^{-x}$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - z - 2$ che ha radici 2 e -1. Dunque le soluzioni dell'omogenea sono

$$y_0(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{2x}$$

Dato che -1 è radice di P cerco una soluzione particolare $\bar{y}$ del tipo $\bar{y}(x) = \gamma x e^{-x}$ $\Rightarrow$

$$\bar{y}'(x) = \gamma(1-x)e^{-x}, \quad \bar{y}''(x) = \gamma(-2+x)e^{-x} \Rightarrow$$

$$\bar{y}''(x) - \bar{y}'(x) - 2\bar{y}(x) = \gamma(-2+x-1+x-2x)e^{-x} = -3\gamma e^{-x}$$

e quindi $\gamma = 1$ va bene. Dunque la sol. generale dell'equazione è data da

$$y(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{2x} + xe^{-x}.$$

Se ne ricava:

$$\begin{cases} y(0) = \alpha + \beta \\ y'(0) = -\alpha + 2\beta + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2y(0) - y'(0) + 1}{3} \\ \beta = \dfrac{y(0) + y'(0) - 1}{3} \end{cases}$$

da cui si ottengono i valori di α e β imponendo le condizioni iniziali

(9) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A e^{2x} + e^{x}}{(e^{2x}+4)^2}\, dx$$ Poniamo $e^{x} = y \Rightarrow e^{x} dx = dy$

$$\to \int_0^{+\infty} \frac{Ay+1}{(y^2+4)^2}\, dy = A\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{y}{(y^2+4)^2}\, dy}_{1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(y^2+4)^2}}_{2}$$

$$1 = -\frac{A}{2}\left[\frac{1}{y^2+4}\right]_0^{+\infty} = \frac{A}{8}$$

$$2 = \frac{1}{4}\left\{\int_0^{+\infty} \frac{y^2+4}{(y^2+4)^2}\, dy - \int y \frac{y}{(y^2+4)^2}\, dy\right\} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+4} - \frac{1}{4}\left[y \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{y^2+4}\right]_0^{+\infty}$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{32}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\left(\frac{y}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{16}\left[\operatorname{arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{32}$$

DUNQUE L'INTEGRALE FA $\frac{A}{8} + \frac{\pi}{32}$

(5) $$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(x)\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{8+7x^4}}{\cos(x^2) - 1}$$

usiamo Taylor: utilizzeremo le formule

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{}$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$$

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{y}{3} + o(y)$$

Analizziamo il numeratore:

$$2\cos(x)\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{8+7x^4} =$$

$$2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) - 2\sqrt[3]{1+\frac{7}{8}x^4} =$$

$$2\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$-2\left(\cancel{1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$2\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} - \frac{7}{24}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{5}{4}x^4 + o(x^4)$$

Vediamo il denominatore:

$$\cos(x^2) - 1 = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 = -\frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

DUNQUE IL LIMITE È DEL TIPO

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{4}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{4}x^4}{-\frac{1}{2}x^4} = \frac{5}{2}$$

sostituzione degli infinitesimi

(10)

$$y' = -\frac{xy}{x^2+1} + \frac{x-1}{1+x^2}$$. Poniamo $y_0 = y(0)$

a)

$$A(x) := -\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_0^x = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

da cui

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left\{y_0 + \int_0^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt\right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left\{y_0 + \left[\sqrt{t^2+1} - \operatorname{arcsinh}(t)\right]_0^x\right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left\{ y_0 - 1 + \sqrt{x^2+1} - \text{arcsinh}(x) \right\} =$$

$$\frac{c}{\sqrt{x^2+1}} + 1 - \frac{\text{arcsinh}(x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{c - \text{arcsinh}(x)}{\sqrt{x^2+1}} + 1$$

DOVE $c = y_0 - 1$ $(y_0 = c+1)$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 1$ perché

$$\lim_{x \to +\infty / -\infty} \frac{c - \text{arcsinh}(x)}{\sqrt{x^2+1}} = (\text{Hôp.})$$

$$\lim_{x \to +\infty / -\infty} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x \to +\infty / -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

NOTIAMO CHE, DAI CALCOLI SOPRA, RISULTA

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{c - \text{arcsinh}(x)}{\sqrt{x^2+1}} = 0^-, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{c - \text{arcsinh}(x)}{\sqrt{x^2+1}} = 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} y(x) = 1^- \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = 1^+$$

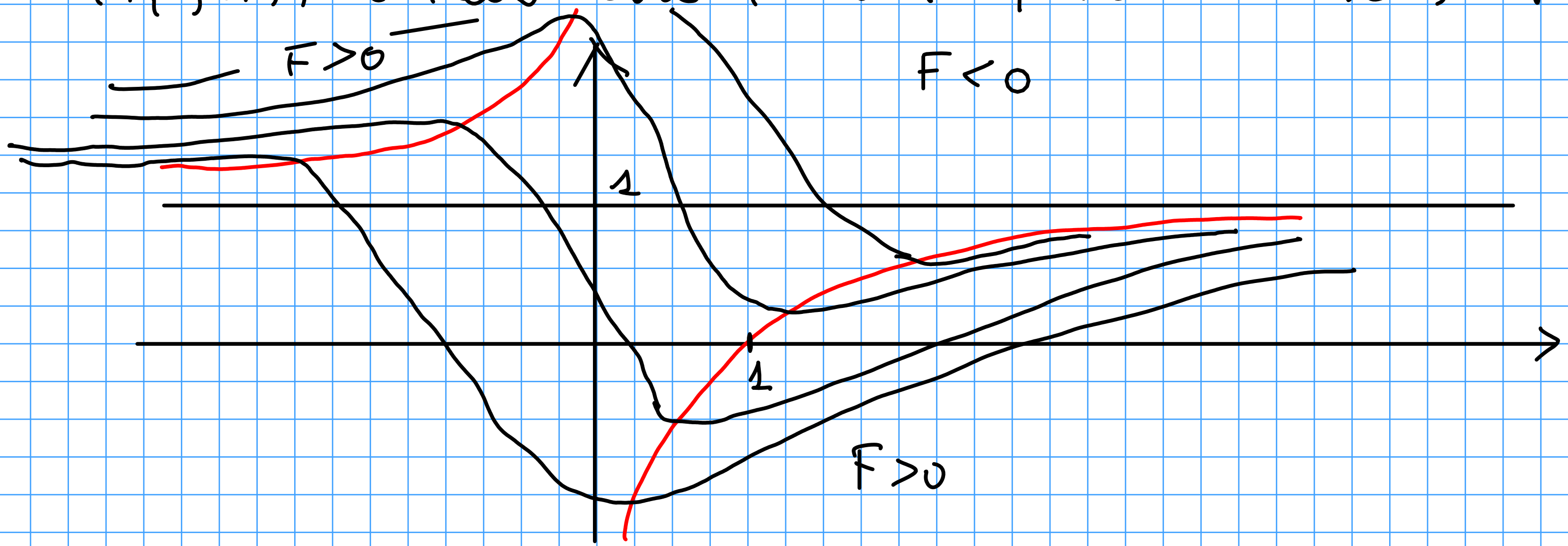
(c) Per la monotonia consideriamo $F(x,y) := \dfrac{-xy}{x^2+1} + \dfrac{x-1}{1+x^2}$

di modo che l'equazione si scrive: $y' = F(x,y)$.

Si ha che $F(x,y) = 0 \iff x \neq 0$ e $y = \dfrac{x-1}{x} =: g(x)$

e $F(x,y) > 0 \iff \begin{cases} y < g(x) & \text{per } x > 0 \\ \text{MAI} & \text{per } x = 0 \\ y > g(x) & \text{per } x > 0 \end{cases}$

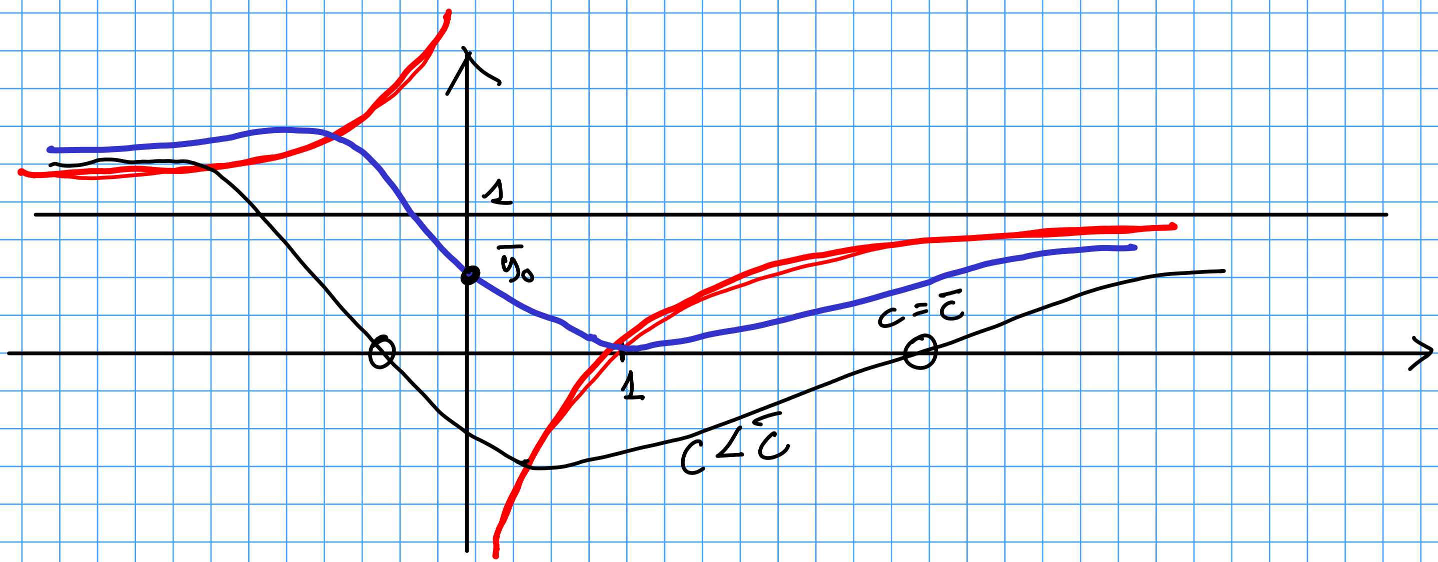
Tracciamo il grafico della $g(x)$ (curva rossa) - dopo possiamo vedere l'andamento della $y(x)$ tenendo presente che $y'(x) > 0 / < 0$ se $(x, y(x))$ è nella zona in cui $F > 0$ / $F < 0$. Risulta:



(in realtà tutte le curve hanno lo stesso andamento).

(d) tracciamo la soluzione $\bar{y}$ tale che $\bar{y}(1)=0$. Questa $\bar{y}$ ha coefficiente $\bar{c}$ dato da $0 = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}}\left(\bar{c} + \sqrt{1+1^2} - \operatorname{arcsinh}(1)\right)$

$\Leftrightarrow \quad \bar{c} = \operatorname{arcsinh}(1) - \sqrt{2} \Leftrightarrow \bar{y}(0) = \operatorname{arcsinh}(1) + 1 - \sqrt{2} \quad (=: \bar{y}_0)$



La curva $\bar{y}$ è rappresentata sopra in blu. Allora si vede che $y(x)$ passa due volte per zero $\Leftrightarrow c < \bar{c}$, cioè se

$y(0) < 1 - \sqrt{2} + \operatorname{arcsinh}(1)$