Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 1 giugno 2013. FILA A

1. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n+1}{2+3n+n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+2^{-n}}{1+8^{-n}}$$

2. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^3-\cos(x)}{x^{\alpha}(1+x^3)}\, dx$$

3. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):

$$\begin{cases} y''-y'-2y=4xe^x \\ y(0)=1, y'(0)=1 \end{cases}$$

4. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_1^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

5. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1} - \frac{x-1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
   (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (al variare d ella suddetta C) (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
   (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 1 giugno 2013. FILA B

1. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n+1}{5+2n+n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+5^{-n}}{1+8^{-n}}$$

2. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^3-\cos(x)}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, dx$$

3. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 4xe^x \\ y(0) = 2, y'(0) = 3 \end{cases}$$

4. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

5. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1} - \frac{x-1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
   (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (al variare d ella suddetta C) (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
   (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 1 giugno 2013. FILA C

1. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n+1}{4+5n+n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+4^{-n}}{1+8^{-n}}$$

2. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^3-\cos(x)}{x^{\alpha}(1+x^5)}\, dx$$

3. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):

$$\begin{cases} y''-y'-2y=4xe^x \\ y(0)=1, y'(0)=-5 \end{cases}$$

4. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

5. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1} - \frac{x-1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
   (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (al variare d ella suddetta C) (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
   (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $y(x)=0$ ha due radici (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 1 giugno 2013. FILA D

1. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n+1}{3+4n+n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+3^{-n}}{1+8^{-n}}$$

2. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^3-\cos(x)}{x^\alpha(1+x^4)}\, dx$$

3. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):

$$\begin{cases} y''-y'-2y=4xe^x \\ y(0)=2, y'(0)=-6 \end{cases}$$

4. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

5. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1} - \frac{x-1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (2p.);
   (b) si calcolino i limiti delle soluzioni per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (al variare d ella suddetta C) (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (4p.);
   (d) si individuino le soluzioni $y(x)$ per cui l'equazione $y(x)=0$ ha due radici (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

1. (a) AC ~~C~~ NC (b) AC C ~~NC~~

2. l'integrale converge per : $1 < \alpha < 3$

3. $y(x) =$ $2e^{2x} - (1+2x)\,e^{x}$

4. integrale = $-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}$

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

voto

Data:	2013
Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila:	B

1. (a) AC ~~C~~ NC (b) AC C ~~NC~~

2. l'integrale converge per : $2 < \alpha < 3$

3. $y(x) =$ $3e^{2x} - (1+2x)e^{x}$

4. integrale = $-\frac{5}{12}\pi + \frac{1-\sqrt{3}}{8}$

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

1. (a) AC ~~C~~ NC (b) AC C ~~NC~~

2. l'integrale converge per : $-1 < \alpha < 3$

3. $y(x) = 2e^{-x} - (1+2x)e^{x}$

4. integrale $= -\frac{3\pi}{8}$

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

voto

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

1. (a) AC ~~C~~ NC (b) AC C ~~NC~~

2. l'integrale converge per : $0 < \alpha < 3$

3. $y(x) =$ $3e^{-x} - (1+2x)e^{x}$

4. integrale = $-\frac{\pi}{12} + \frac{1+\sqrt{3}}{8}$

$\boxed{1}$ (a) $\sum \frac{(-1)^n n + 1}{A + Bn + n^2}$ (A e B dipendono dalla fila)

Chiamo $a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{A + Bn + n^2}$, a_n non è a termini positivi

$|a_n| = \frac{n}{A + Bn + n^2} \left| (-1)^n + 1/n \right| = \frac{n}{A + Bn + n^2} \simeq \frac{1}{n}$. Dato che

$\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ si ha che $\sum_n |a_n| = +\infty$ e quindi $\sum_n a_n$

non converge assolutamente. Per la convergenza semplice notiamo

che $a_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{A + Bn + n^2}}_{b_n} + \underbrace{\frac{1}{A + Bn + n^2}}_{c_n}$. È chiaro che $c_n \simeq \frac{1}{n^2}$

e quindi $\sum_n c_n$ converge. Per altro $\sum_n b_n$ è a segni alterni

e si vede facilmente che si può applicare Leibniz. Dunque $\sum_n b_n$

converge e di conseguenza $\sum_n a_n$ converge

(b) $\sum (-1)^n \frac{1 + A^{-n}}{1 + 8^{-n}}$ (A dipende dalla fila e $0 < A < 8$)

Se pongo $a_n = \frac{1 + A^{-n}}{1 + 8^{-n}}$ noto che $a_n \to \frac{1+0}{1+0} = 1$. Ne segue che $(-1)^n a_n$ NON PUÒ TENDERE A ZERO (visto che $|(-1)^n a_n| \to 1$)

Dunque $\sum_n (-1)^n a_n$ $\boxed{\text{NON CONVERGE}}$

$\boxed{2}$ $$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^3-\cos(x)}{x^\alpha(1+x^k)}$$ (K dipende dalla fila)

Dato che $f(x) = \dfrac{1+x^3-\cos(x)}{x^\alpha(1+x^k)}$ è continua su $]0,+\infty[$

dobbiamo trovare l'integrabilità su $]0,1]$ e su $[1,+\infty[$

(1) Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{1+x^3-1+x^2/2+o(x^2)}{x^\alpha\,(1+o(1))} \sim \dfrac{x^2}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-2}}$

Ne segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \alpha-2<1 \iff \alpha<3$

(2) Per $x \to \infty$ si ha $f(x) = \dfrac{x^3+o(x^2)}{x^\alpha(x^k+o(x^k))} \sim \dfrac{x^3}{x^\alpha x^k} = \dfrac{1}{x^{\alpha+k-3}}$

Ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \alpha+k-3>1 \iff \alpha>4-k$

DUNQUE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff$ $\boxed{4-k<\alpha<3}$

(IN OGNI CASO i valori di K erano >1 in modo che l'intervallo $]4-k, 3[$ è diverso dal vuoto)

$\boxed{3}$ $y'' - y' - 2y = 4xe^x$

Il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - z - 2$ ha radici 2 e -1 per cui le soluzioni dell'omogenea sono

$$\boxed{y_0(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}}$$

Dato che $P(1) \neq 0$ posso cercare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(x) = (ax+b)e^x \Rightarrow \bar{y}'(x) = (ax+b+a)e^x, \quad \bar{y}''(x) = (ax+b+2a)e^x$$

$$\Rightarrow \bar{y}'' - \bar{y}' - 2\bar{y} = e^x(\cancel{a}x + \cancel{b} + 2a - \cancel{ax} - \cancel{b} - a - 2ax - 2b)$$
$$= e^x(-2ax + a - 2b)$$

da cui $a = -2$ $b = -1$, cioè $\boxed{\bar{y}(x) = -(1+2x)e^x}$

Allora la soluzione generale è $y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x} - (1+2x)e^x$

che implica $\boxed{y(0) = \alpha + \beta - 1}$ $\boxed{y'(0) = 2\alpha - \beta - 3}$ e quindi

risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = y(0) + 1 \\ 2\alpha - \beta = y'(0) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = y(0) + y'(0) + 4 \\ 3\beta = 2y(0) - y'(0) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{y(0) + y'(0) + 4}{3} \\ \beta = \dfrac{2y(0) - y'(0) - 1}{3} \end{cases}$$

si trovano i valori di α e β.

$\boxed{4}$ Facciamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx}_{1} - \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}_{2}$$

$$1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dy}{y^2} \quad (\text{se } y = 1+x^2) = -\frac{1}{y} + c = -\frac{1}{x^2+1} + c$$

$$2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \right) dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int x \, \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \text{(per parti nel secondo integrale)}$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\, x \left(-\frac{1}{x^2+1} \right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}$$

IN DEFINITIVA

$$\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1} + c$$ da cui

$$\int_a^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(a) + \frac{1}{2}\,\frac{a+1}{a^2+1}$$ (a dipende dalla f. b)

$\boxed{5}$

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1} - \frac{x-1}{x^2+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Prendiamo $y_0 = y(0)$. Sia $A(x) = \int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \left[\ln(1+t^2)\right]_0^x$

$= \ln(1+x^2)$. Dalla formula risolutiva si ha:

$$y(x) = (1+x^2)\left\{ y_0 - \int_0^x \frac{t-1}{(t^2+1)^2}\,dt \right\} = \text{(VEDI ESERCIZIO 4)}$$

$$(1+x^2)\left\{ y_0 + \left[\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1}\right]_0^x \right\} =$$

$$(1+x^2)\left\{ c + \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1} \right\} =$$

$$c\,(1+x^2) + \frac{(1+x^2)}{2}\arctan(x) + \frac{x+1}{2}$$

(dove - volendo - $c = y_0 - \frac{1}{2}$)

(b)

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > -\frac{\pi}{4} \\ 1/2 & \text{se } c = -\pi/4 \\ -\infty & \text{se } c < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \left(y_0 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

I casi con $c \neq -\frac{\pi}{4}$ sono evidenti, nel caso $c = \frac{\pi}{4}$ usiamo l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}}{\frac{1}{(x^2+1)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{x-1}{(x^2+1)^2}}{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}} = \frac{1}{2}$$

(per la derivata del numeratore nota che $\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1} = -\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$)

Per motivi analoghi

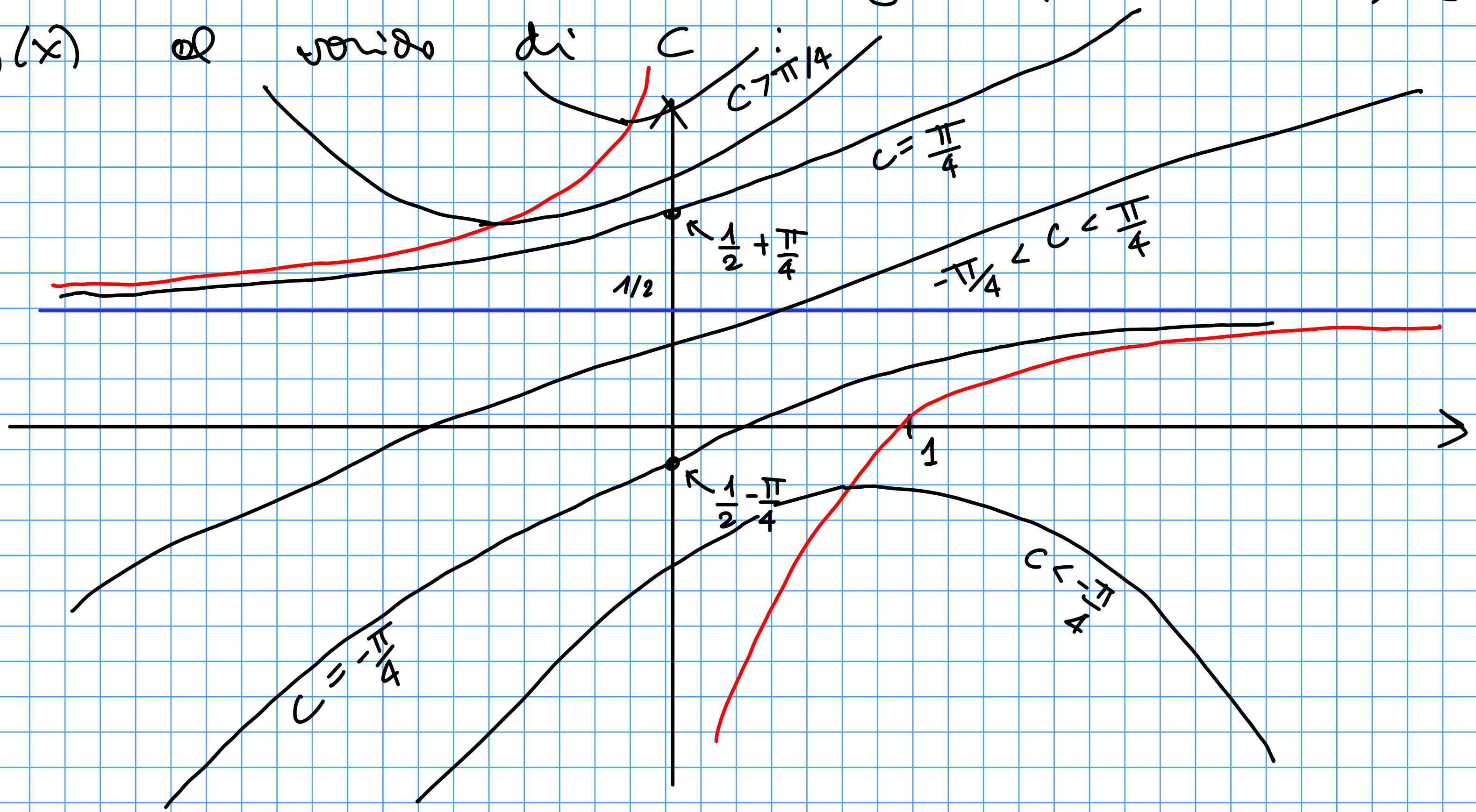
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > \frac{\pi}{4} \\ 1/2 & \text{se } c = \frac{\pi}{4} \\ -\infty & \text{se } c < \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \left(y_0 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

(c) Poniamo $F(x,y) := \frac{2xy}{x^2+1} - \frac{x-1}{x^2+1}$.

Allora $F(x,y) = 0 \iff y = \frac{x-1}{2x} =: g(x)$

e $F(x,y) > 0 \iff \begin{cases} y > g(x) & \text{dove } x > 0 \\ \forall y & \text{se } x = 0 \\ y < g(x) & \text{dove } x < 0 \end{cases}$

Possiamo allora tracciare la $g(x)$ (IN ROSSO) e le curve $y(x)$ al variare di c:

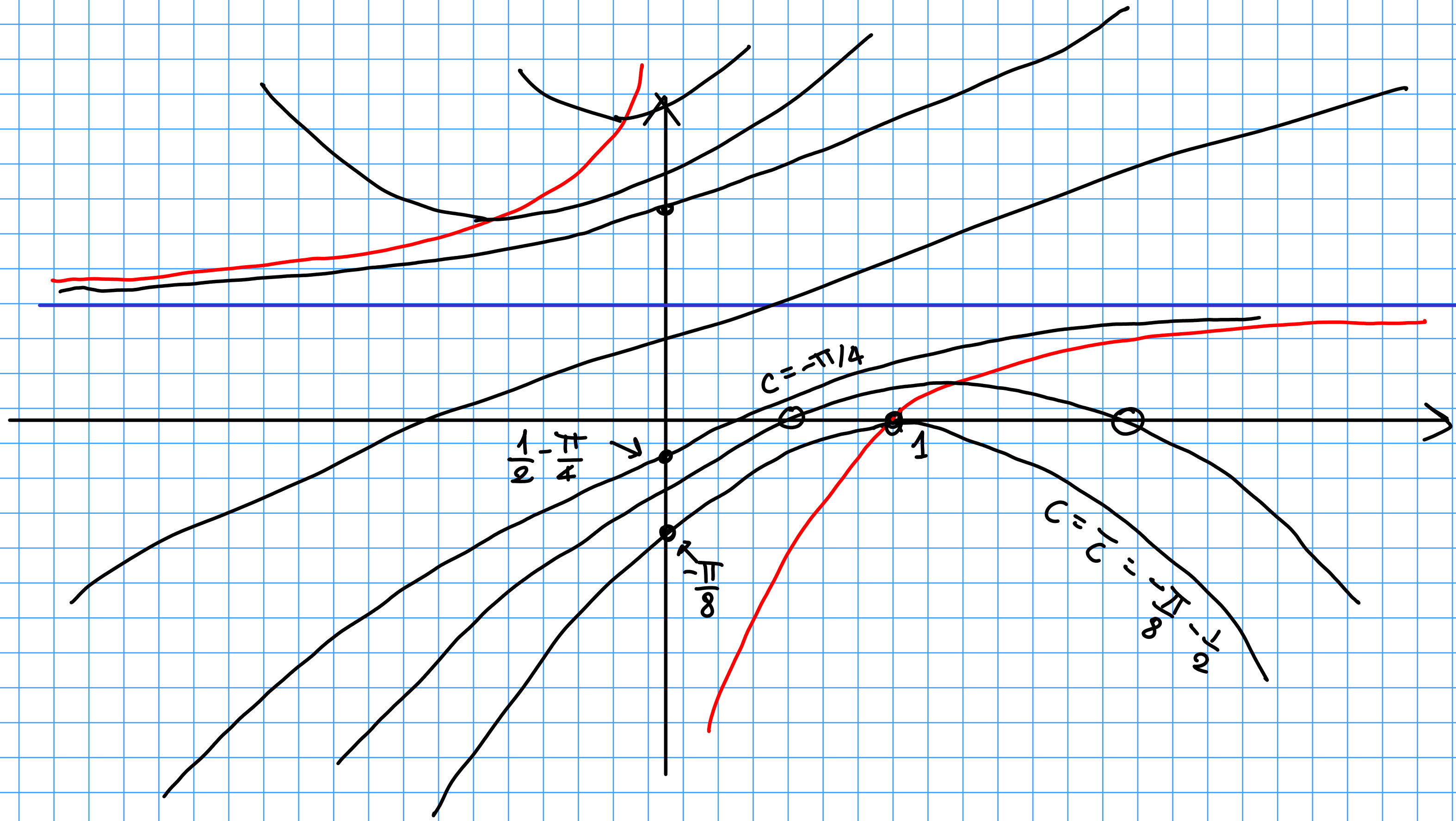


(d) Si vede da quanto sopra che $g(x)=0 \iff x=1$

Cerchiamo la soluzione $\bar{y}$ che passa per $(1,0) \Rightarrow$

$$0 = (1+1^2)\left(\bar{c} + \frac{1}{2}\arctan(1) + \frac{1}{2}\,\frac{1+1}{1^2+1}\right) = 2\left(\bar{c} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right)$$

da cui $\bar{c} = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$ $\quad$ (e $\bar{y} = -\frac{\pi}{8}$



SI VEDE DAL GRAFICO SOPRA CHE $y(x)$ attraversa due volte l'asse x $\Longleftrightarrow -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} < c < -\frac{\pi}{4}$, cioè per

$$-\frac{\pi}{8} < y_0 < -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$