Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 16 febbraio 2013.

1. Sia $f(x) := \ln(2e^{2x} - \cos(x))$. Si calcolino (2+2 punti):
$$(a) \quad f'(0), \qquad (b) \quad f''(0).$$

2. Data la funzione
$$f(x) := 3 + \frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti):
$$(a) \quad \max f(x), \qquad (b) \quad \min f(x).$$
(se si ritiene che il massimo/minimo non esistano si scriva "non esiste").

3. Date le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite da $f(x) := e^{x-2} + x - 3$ e $g(x) := (f^{-1}(x))^2$, si dica quanto fa $g'(0)$ (4 punti).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5 punti ciascuno)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n) - 1}{3n^2 - n^4}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^{2n} + n^6}$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13 punti):
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\sqrt{4 + 8x - 12x^2} - \sqrt[3]{1 + 6x}\right)}{x - \tan(x)}$$

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n - 1 - n}{n^4} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + e^{-n}}{n^2 + 1}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha (1 - e^{-x^4})}{(1 + x^2)\sqrt{|x^2 - 1|}} \, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5 punti):
$$y'' + 9y = x^2 + 1 \qquad y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2x} + 4e^x + 4} \, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' + \frac{2y}{x+2} = 3 - x \qquad x > -2.$$
    (a) si scriva la soluzione $y(x)$ dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
    (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -2^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
    (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 3$ ha due radici in $]-1, +\infty[$ (2p.).

NOTA: Il voto complessivo si ottiene DIVIDENDO PER 2 la somma dei punti.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA | | / | | 2013

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

1. (a) 4 (b) -7

2. (a) $3+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) 3

3. 2

4. (a) 0 (b) 4

5. L'esercizio 5 va svolto (usare le facciate bianche).

6. (a) AC | C | ~~NC~~ (b) AC | ~~C~~ | NC

7. α $-5<\alpha<2$

8. $y(x) = \dfrac{7(1-\cos(3x))+9x^2}{81}$

9. integ.= $\dfrac{\ln(3)}{4}-\dfrac{1}{6}$

10. L'esercizio 10 va svolto (usare le facciate bianche).

1)

$$f(x)=\ln\left(2e^{2x}-\cos(x)\right)=\ln\left(2\left(1+2x+\frac{4x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)=$$

$$\ln\left(1+4x+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)=4x+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)-\frac{1}{2}\left(4x+o(x)\right)^2+o(x^2)=$$

$$4x-\frac{7}{2}x^2+o(x^2)\quad\Rightarrow\quad\boxed{f'(0)=4\ ,\ f''(0)=-7}$$

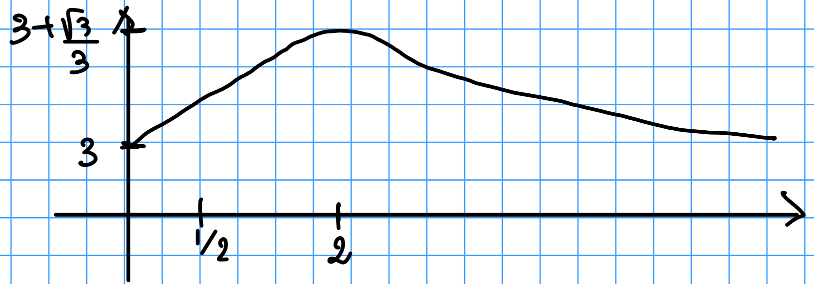
2)

$$f(x)=3+\frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$$

DOMINIO $=\{x\geq +1/2\}$. $\quad f(1/2)=3\quad ;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

$$f'(x)=\frac{2-x}{\sqrt{2x-1}\,(x+1)^2}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=0 \text{ per } x=2\quad ;\quad f(2)=3+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow\quad\boxed{\begin{array}{l}\max f=3+\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \min f=3\end{array}}$$

3)

$$f(x)=e^{x-2}+x-3\quad\Rightarrow\quad f(2)=0\quad \text{da cui}\quad f^{-1}(0)=2$$

$$f'(x)=e^{x-2}+1\quad\Rightarrow\quad f'(2)=2\quad\text{da cui}\quad\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{2}$$

Ne segue che $g'(0)=\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right)^2\Big|_{x=0}=2f^{-1}(0)\cdot\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{2\cdot 2}{2}=\boxed{2}$

4) (a) $\dfrac{\cos(n)-1}{3n^2-4} = \dfrac{\text{LIMITATO}}{\infty} \to \boxed{0}$

(b) $\sqrt[n]{3^n+2^{2n}+n^6} = \sqrt[n]{3^n+4^n+n^6} = 4\sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}+1+\underbrace{\frac{n^6}{4^n}}_{\to 0}} \to \boxed{4}$

6) (a) $a_n := \dfrac{e^n-1-n}{n^4} = \underbrace{\dfrac{e^n}{n^4}}_{\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^n n^4}-\dfrac{1}{e^n n^3}\right) \to \infty \cdot 1 = \infty$

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ $\boxed{\text{NON CONVERGE}}$, dato che il termine NON $\to 0$

(b) $a_n := \dfrac{n+e^{-n}}{n^2+1} = \underbrace{\dfrac{n}{n^2+1}}_{=b_n} + \underbrace{\dfrac{e^{-n}}{n^2+1}}_{=c_n}$.

Si vede che $\sum b_n$ NON CONVERGE DATO CHE $b_n \simeq \frac{1}{n}$, mentre $\sum_n c_n$ CONVERGE, usando il criterio della radice. DUNQUE $\sum_n a_n$ NON CONVERGE cioè $\sum_n (-1)^n a_n$ NON È ASS. CONV.

Però $(-1)^n a_n = (-1)^n b_n + (-1)^n c_n$ e $\sum_n (-1)^n c_n$ CONVERGE (assolutamente) per quanto sopra. D'altra parte $b_n \to 0$ ed è decrescente $\Rightarrow \sum_n (-1)^n b_n$ CONVERGE per Leibniz.

In definitivo $\sum_n (-1)^n a_n$ $\boxed{\text{CONVERGE MA NON ASSOLUTAMENTE}}$

(7) $$f(x) := \frac{x^\alpha \left(1 - e^{-x^4}\right)}{(1+x^2)\sqrt{|x^2-1|}}$$

Per l'integrabilità di f su $]0, +\infty[$ ci sono tre punti da studiare:

$\underline{x=0}$ In questo caso $f(x) \simeq \frac{x^\alpha (x^4)}{1} = x^{4+\alpha}$ che è integrabile vicino a zero quando $4+\alpha > -1 \iff \boxed{\alpha > -5}$

$\underline{x=1}$ In questo caso $f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$ che è integrabile vicino a 1 $\Rightarrow$ NESSUNA CONDIZIONE SU α

$\underline{x \to +\infty}$ In questo caso $f(x) \simeq \frac{x^\alpha}{x^2 \sqrt{x^2}} = x^{\alpha-3}$ che è integrabile per $\alpha - 3 < -1 \iff \alpha < 2$

IN DEFINITIVA CI VUOLE $\boxed{-5 < \alpha < 2}$

8) $y'' + 9y = 0 \Rightarrow y = A\cos(3x) + B\sin(3x)$

Cerco $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$ che risolva $y'' + 9y = x^2 + 1$. Allora

$\bar{y}'(x) = 2ax + b \qquad \bar{y}''(x) = 2a \Rightarrow$

$2a + 9(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1 \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{9}, \ b = 0, \ c = \frac{7}{81}$

Dunque la soluzione generale dell'eq. è

$$y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{9x^2 + 7}{81}$$

e

$$y'(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) + \frac{2x}{9}$$

che messi nelle condizioni iniziali implicano $A = -\frac{7}{81}$, $B = 0$

IN DEFINITIVA $y(x) = \dfrac{-7\cos(3x) + 9x^2 + 7}{81}$

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x} + 4e^x + 4} = \left(e^x = y \quad x = \ln y \quad dx = \frac{dy}{y} \right)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y(y^2 + 4y + 4)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{4y} - \frac{1}{4}\frac{1}{y+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(y+2)^2} \right) dy =$$

$$\left[\frac{1}{4}\ln\frac{y}{y+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{y+2}\right]_1^{+\infty}=-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\boxed{\frac{1}{4}\ln(3)-\frac{1}{6}}$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{4+8x-12x^2}-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x-\tan(x)}\ .$$ Si ha:

$$\sqrt{4+8x-12x^2}=2\left(1+2x-3x^2\right)^{1/2}=$$

- $$2\left(1+\frac{1}{2}\left(2x-3x^2\right)-\frac{1}{8}\left(2x-3x^2\right)^2+\frac{1}{16}\left(2x-3x^2\right)^3+o\left(x^3\right)\right)=$$

$$2\left(1+x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{8}\left(4x^2-12x^3+o(x^3)\right)+\frac{1}{16}\left(8x^3+o(x^3)\right)+o(x^3)\right)=$$

$$2\left(1+x-2x^2+2x^3+o(x^3)\right)=2+2x-4x^2+4x^3+o(x^3)$$

- $$\sqrt[3]{1+6x}=1+\frac{1}{3}\cdot 6x-\frac{1}{9}(6x)^2+\frac{5}{81}(6x)^3+o(x^3)=$$

$$=1+2x-4x^2+\frac{40}{3}x^3+o(x^3)$$

- $$\ln\left(\sqrt{4+8x-12x^2}-\sqrt[3]{1+6x}\right)=\ln\left(1-\frac{28}{3}x^3+o(x^3)\right)=-\frac{28}{3}x^3+o(x^3)$$

- $x - \tan(x) = x - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$

IN DEFINITIVA IL LIMITE DIVENTA

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{28}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)} \longrightarrow 28$$

10) $y' = -\frac{2y}{x+2} + 3 - x \qquad y(0) = y_0 \qquad (\text{per } x > -2)$

(a)

$$y(x) = \frac{4}{(x+2)^2}\left\{ y_0 + \int_0^x \frac{(t+2)^2}{4}(3-t)\,dt \right\} =$$

$$\frac{1}{(x+2)^2}\left\{ 4y_0 + \int_0^x (3-t)(t+2)^2\,dt \right\} = (\text{per parti})$$

$$\frac{1}{(x+2)^2}\left\{ 4y_0 + \left[(3-t)\frac{(t+2)^3}{3}\right]_0^x + \int_0^x \frac{(t+2)^3}{3}\,dt \right\} =$$

$$\frac{1}{(x+2)^2}\left\{ 4y_0 + \frac{(3-x)}{3}(x+2)^3 - 8 + \frac{(x+2)^4}{12} - \frac{16}{12} \right\}$$

$$\frac{4y_0-\frac{28}{3}}{(x+2)^2}+(x+2)\left(\frac{3-x}{3}+\frac{x+2}{12}\right)=\frac{c}{(x+2)^2}+\frac{(x+2)}{12}(14-3x)$$

$$=\boxed{\frac{c}{(x+2)^2}+\frac{(x+2)(14-3x)}{12}} \quad \text{dove} \quad \boxed{c=4\left(y_0-\frac{7}{3}\right)}$$

$$\left(=\frac{1}{(x+2)^2}\left\{c+\frac{(x+2)^3(14-3x)}{12}\right\}=\frac{1}{(x+2)^2}\left\{c+\frac{112+144x+48x^2-4x^3-3x^4}{12}\right\}\right)$$

(b) $$\lim_{x\to -2^+} y(x)=\begin{cases} +\infty & \text{se } c>0 \iff y_0>7/3 \\ 0 & \text{se } c=0 \iff y_0=7/3 \\ -\infty & \text{se } c<0 \iff y_0<7/3 \end{cases}$$

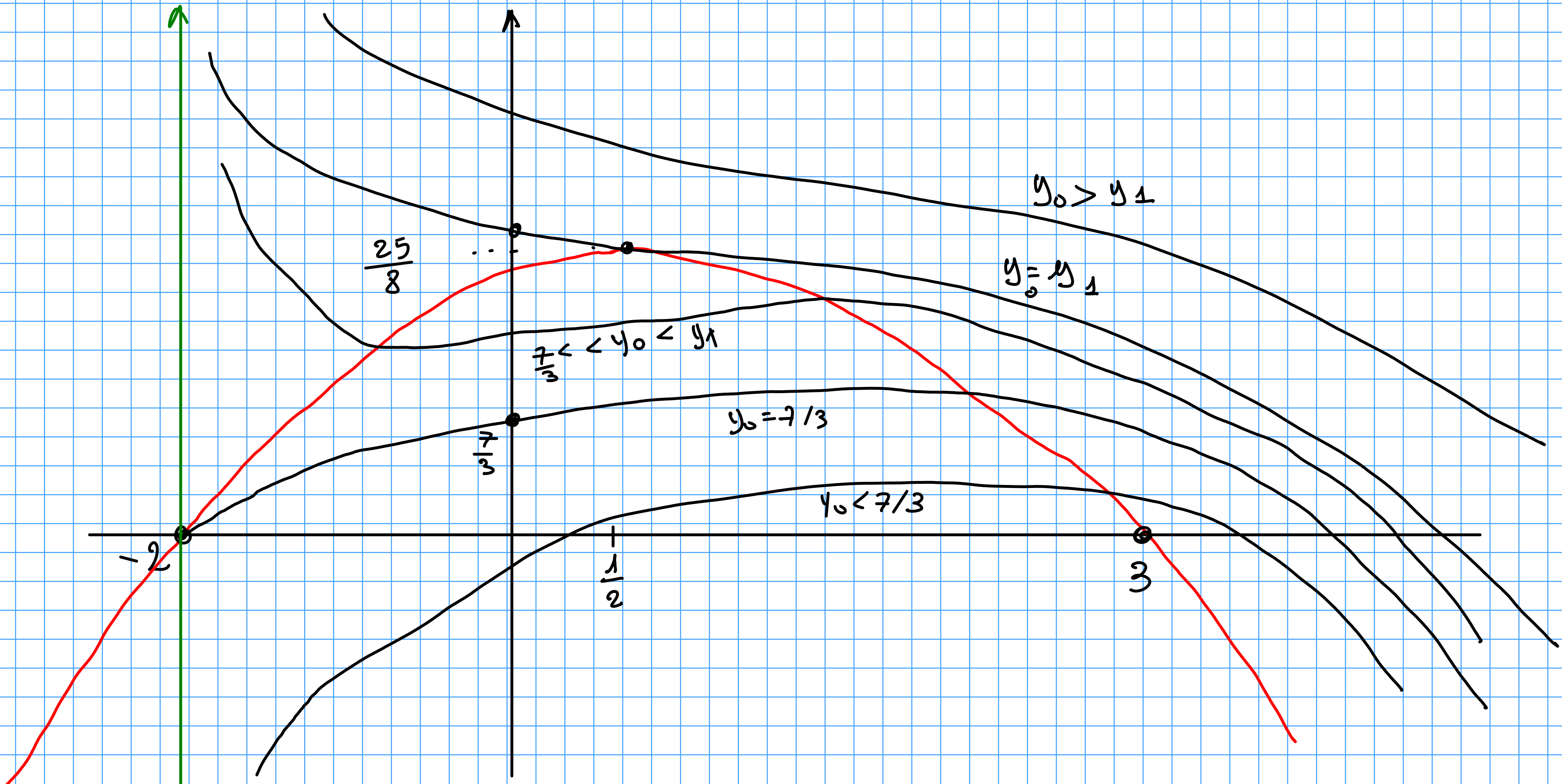
$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=-\infty$$

(c) Poniamo $F(x,y):=-\frac{2y}{x+2}+3-x$ (di modo che

l'eq. diff. diventa $y'(x)=F(x,y(x))$). Allora (se $\underline{x>-2}$)

$F(x,y)>0 \iff \frac{(3-x)(x+2)}{2}>y$ (discorso analogo per $F(x,y)<0$, $F(x,y)=0$

Poniamo $g(x) := \dfrac{(3-x)(x+2)}{2}$ $\Rightarrow$ g è una parabola con concavità verso il basso con radici -2 e 3 e vertice in $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{8}\right)$. Se tracciamo il grafico di g allora le soluzioni $y(x)$ saranno crescenti quando si trovano <u>sotto</u> g e decrescenti quando sono SOPRA g. DUNQUE



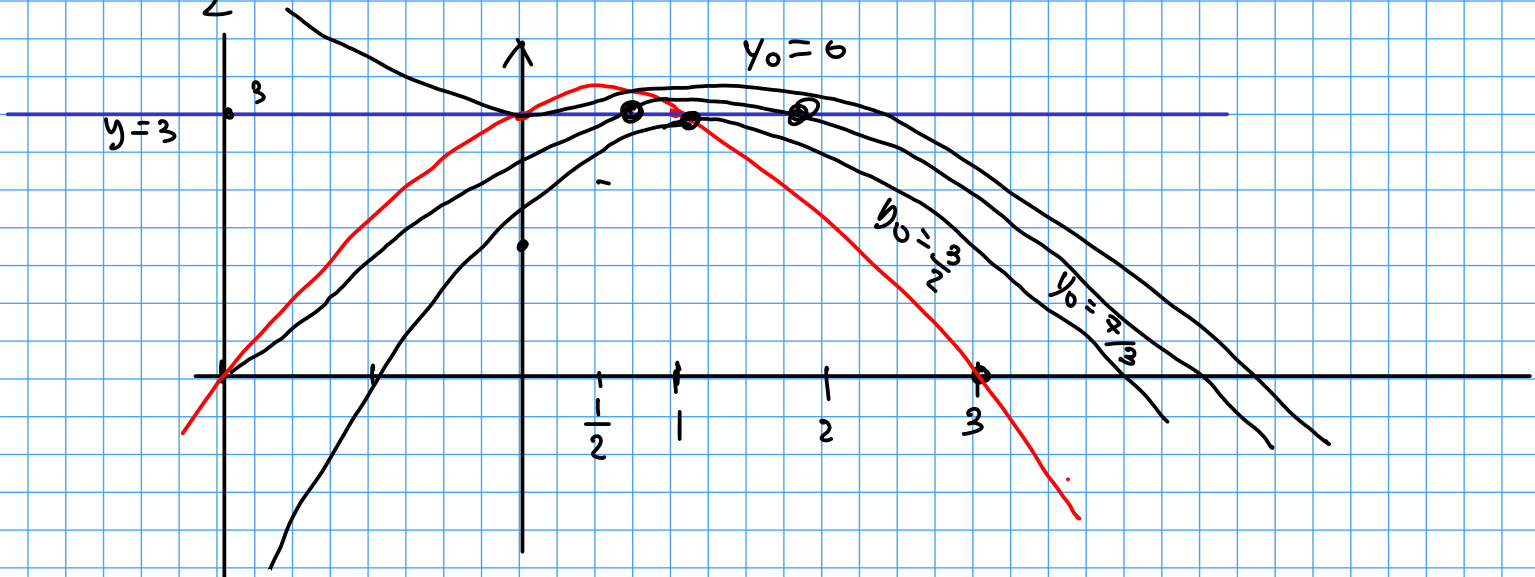
Nei grafici sopra: y_1 è il valore di y_0 tale che la relativa soluzione passi per $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{8}\right)$ cioè, se $c_1 = 4\left(y_1 - \frac{7}{3}\right)$ e

$$\frac{25}{8} = \frac{c_1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\left(14-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{12} \iff \frac{25}{8} = \frac{c_1}{\frac{9}{4}} + \frac{\frac{25}{2}\cdot\frac{\cancel{2}^{\,1}}{2}}{1\cancel{2}\,4} \iff$$

$$\frac{4}{9}c_1 = \frac{25}{16} \iff c_1 = \frac{25\cdot 9}{64} \iff y_1 = \frac{c_1}{4} + \frac{7}{3} = \frac{225}{256} + \frac{7}{3}$$

(d) Tracciamo la retta $y=3$. Notiamo che tale retta interseca il grafico di g nei punti x tali che

$$\frac{(3-x)(x+2)}{2} = 3 \iff 6+x-x^2 = 6 \iff x=0,\ x=1$$



Troviamo le soluzioni che passano per $(0,3)$ e $(1,3)$.

La prima ha $y_0 = 3$, la seconda ha $y_0 = y_2$ dove

$$1 = \frac{c_2}{(1+1)^2} + \frac{(|4-3|)(1+1)}{12} \iff$$

$$1 = \frac{c_2}{4} + \frac{11}{6} \iff c_2 = 4\left(1 - \frac{11}{6}\right) = -\frac{4 \cdot 5}{6} = -\frac{10}{3}$$

$$\iff y_2 = \frac{7}{3} + \frac{c_1}{4} = \frac{7}{3} - \frac{5}{6} = \frac{14-5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

NOTIAMO CHE $\frac{3}{2} < \frac{7}{3}$. DUNQUE (COME SI VEDE DAL GRAFICO) $y(x)$ TOCCA DUE VOLTE LA RETTA $y=3$

QUANDO $\boxed{y_0 = 0}$ E QUANDO $\boxed{\frac{3}{2} \leq y_0 < \frac{7}{3}}$