Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 13 febbraio 2013. **FILA A**

1. Siano f e g due funzioni tali che $f(0) = 1$, $f'(0) = 4$, $g(1) = 0$, $g'(1) = 5$.
   Se $h(x) := f(g(x))$ e $k(x) := g(f(x)^2)$, si trovino (2+2 punti):
   $$(a) \quad h'(1), \qquad (b) \quad k'(0).$$

2. Data la funzione
   $$f(x) := \frac{\sqrt{2x-1}}{3x+1}$$
   Si dica quanto fanno (2+2 punti):
   $$(a) \quad \max f(x), \qquad (b) \quad \min f(x).$$
   (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
   $$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+2^n) + 2\cdot 2^n}{2^n}, \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 3\,n^5 + 1}}{n} - n.$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\sqrt{4+8x-4x^2} - \sqrt{1+4x}\right)}{\sin(x) - x}$$

5. Studiare la funzione f definita da $f(x) := 2\ln(|x^3 - x^2 + 2x + 4|) - x$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 13 febbraio 2013. **FILA B**

1. Siano f e g due funzioni tali che $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$, $g(1) = 0$, $g'(1) = 4$.
   Se $h(x) := f(g(x))$ e $k(x) := g(f(x)^2)$, si trovino (2+2 punti):
   $$(a) \quad h'(1), \qquad (b) \quad k'(0).$$

2. Data la funzione
   $$f(x) := \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+1}$$
   Si dica quanto fanno (2+2 punti):
   $$(a) \quad \max f(x), \qquad (b) \quad \min f(x).$$
   (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
   $$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+2^n) + 5\cdot 2^n}{2^n}, \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 2\,n^5 + 1}}{n} - n.$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\sqrt{4-8x-4x^2} - \sqrt{1-4x}\right)}{\sin(x) - x}$$

5. Studiare la funzione f definita da $f(x) := 2\ln(|x^3 - x^2 + 2x + 4|) - x$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 13 febbraio 2013. **FILA C**

1. Siano f e g due funzioni tali che $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $g(1) = 0$, $g'(1) = 3$.
   Se $h(x) := f(g(x))$ e $k(x) := g(f(x)^2)$, si trovino (2+2 punti):
   $$(a) \quad h'(1), \qquad (b) \quad k'(0).$$

2. Data la funzione
   $$f(x) := \frac{\sqrt{2x-1}}{5x+1}$$
   Si dica quanto fanno (2+2 punti):
   $$(a) \quad \max f(x), \qquad (b) \quad \min f(x).$$
   (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
   $$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+2^n) + 4\cdot 2^n}{2^n}, \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 5\,n^5 + 1}}{n} - n.$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\sqrt{4 - 12x - 9x^2} - \sqrt{1-6x}\right)}{\sin(x) - x}$$

5. Studiare la funzione f definita da $f(x) := 2\ln(|x^3 - x^2 + 2x + 4|) - x$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 13 febbraio 2013. **FILA D**

1. Siano f e g due funzioni tali che $f(0) = 1$, $f'(0) = 5$, $g(1) = 0$, $g'(1) = 2$.
   Se $h(x) := f(g(x))$ e $k(x) := g(f(x)^2)$, si trovino (2+2 punti):
   $$(a) \quad h'(1), \qquad (b) \quad k'(0).$$

2. Data la funzione
   $$f(x) := \frac{\sqrt{2x-1}}{4x+1}$$
   Si dica quanto fanno (2+2 punti):
   $$(a) \quad \max f(x), \qquad (b) \quad \min f(x).$$
   (si scriva "non esiste" nel caso in cui f non avesse massimo/minimo).

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
   $$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+2^n) + 3\cdot 2^n}{2^n}, \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^6+4\,n^5+1}}{n} - n.$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\sqrt{4+12x-9x^2} - \sqrt{1+6x}\right)}{\sin(x) - x}$$

5. Studiare la funzione f definita da $f(x) := 2\ln(|x^3 - x^2 + 2x + 4|) - x$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3, E CONTA SOLO LA RISPOSTA.
L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

Data:		2013
Cognome:		
Nome:		
Matricola:		
Fila del compito:	A	

1. (a) 20 (b) 40
2. (a) $\sqrt{15}/15$ (b) 0
3. (a) 2 (b) 1
4. 12

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

Data: | | / | | 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: B

1. (a) 12 (b) 24

2. (a) $\sqrt{2}/4$ (b) 0

3. (a) 5 (b) $2/3$

4. -12

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

Data: 2013

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: C

1. (a) 6 (b) 12
2. (a) $\sqrt{35}/35$ (b) 0
3. (a) 4 (b) 5/3
4. $-81/2$

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

Data:	2013
Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	D

1. (a) 10 (b) 20
2. (a) $\sqrt{6}/12$ (b) 0
3. (a) 3 (b) 4/3
4. 81/2

(1) $f(0)=1,\ f'(0)=A,\ g(1)=0,\ g'(1)=B$.

Allora $h'(x)=\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$ e quindi

$h'(1)=f'(g(1))\,g'(1)=f'(0)\,g'(1)=\boxed{A\cdot B}$

mentre

$k'(x)=\frac{d}{dx}\,g(f(x)^2)=g'(f(x)^2)\cdot\frac{d}{dx}f(x)^2=g'(f(x))\,2f(x)f'(x)$

e quindi $k'(0)=g'(f(0))\,2f(0)f'(0)=g'(1)\,2f(0)\,f'(0)=\boxed{2AB}$

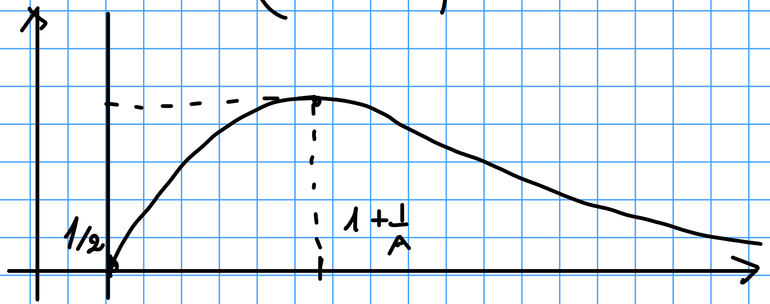
(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{Ax+1}$. DOMINIO $=\{x\geq 1/2\}$

$f(1/2)=0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}(Ax+1)-A\sqrt{2x-1}}{(Ax+1)^2}=\frac{A+1-Ax}{\sqrt{2x-1}\,(Ax+1)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x=\frac{A+1}{A}=1+\frac{1}{A}$

$\Longrightarrow$



$f\left(1+\frac{1}{A}\right)=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{A(A+2)}}}$ (= max f)

min $f=\boxed{0}$

(3) (a) $$a_n = \frac{\ln(1+2^n) + A\cdot 2^n}{2^n} = \frac{\ln(1+2^n)}{2^n} + A$$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \Rightarrow \frac{\ln(1+2^n)}{2^n} \to 0$.

In definitivo $\lim a_n = \boxed{A}$

(b) $$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^6 + A n^5 + 1}}{n} - n = \frac{(n^6 + A n^5 + 1)^{1/3} - n^2}{n} = n\left[\left(1 + \frac{A}{n} + \frac{1}{n^6}\right)^{1/3} - 1\right] =$$

$$n\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{A}{n} + \frac{1}{n^6}\right) + o\left(\frac{A}{n} + \frac{1}{n^6}\right) - 1\right] = n\left[\frac{A}{3}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \to \boxed{\frac{A}{3}}$$

(4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\sqrt{4 + 4bx - b^2x^2} - \sqrt{1+2bx}\right)}{\sin(x) - x}$$

Ricordiamo che $$\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}y^3 + o(y^3)$$

$$= 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3)$$

DUNQUE

$$\sqrt{4+4bx-b^2x^2} = 2\sqrt{1+bx-\frac{b^2}{4}x^2} = 2\Big(1+\overbrace{bx-\frac{b^2}{4}x^2}^{y}\Big)^{1/2} =$$

$$2\left[1+\frac{1}{2}\left(bx-\frac{b^2}{4}x^2\right)-\frac{1}{8}\left(bx-\frac{b^2}{4}x^2\right)^2+\frac{1}{16}\left(bx+o(x)\right)^3+o\left(O(x^3)\right)\right] =$$

$$2\left[1+\frac{bx}{2}-\frac{b^2}{8}x^2-\frac{b^2x^2}{8}+\frac{\overset{16}{b}x^3}{16}-\underbrace{\frac{b^4x^4}{8\cdot 16}}_{=o(x^3)}+\frac{b^3x^3}{16}+o(x^3)+o(x^3)\right] =$$

$$2+bx-\frac{b^2x^2}{2}+\frac{b^3x^3}{4}+o(x^3)$$

$$\sqrt{1+2bx} = (1+2bx)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}2bx-\frac{1}{8}4b^2x^2+\frac{1}{16}8b^3x^3+o(x^3) =$$

$$1+bx-\frac{b^2x^2}{2}+\frac{b^3x^3}{2}+o(x^3) \Rightarrow$$

$$\sqrt{4+4bx-b^2x^2}-\sqrt{1+2bx} = 1-\frac{b^3}{4}x^3+o(x^3) \qquad \text{e}$$

$$\ln\left(\sqrt{4+4bx-b^2x^2}-\sqrt{1+2bx}\right) = \ln\left(1-\frac{b^3}{4}x^3+o(x^3)\right) = -\frac{b^3}{4}x^3+o(x^3)$$

(dato che $\ln(1+y)=y+o(y)$). Inoltre

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

IN DEFINITIVA:

$$\frac{\ln\left(\sqrt{4+4bx-b^2x^2}-\sqrt{1+2bx}\right)}{\sin(x)-x} = \frac{-\frac{b^3}{4}x^3+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \to \boxed{\frac{3}{2}b^3}$$

(5) $f(x) = 2\ln\left(|x^3-x^2+2x+4|\right)$

DOMINIO

Bisogna che $|x^3-x^2+2x+4|>0 \iff x^3-x^2+2x+4 \neq 0$

Si vede che il polinomio $P(x) = x^3-x^2+2x+4$ ha la radice -1: $-1-1-2+4=0$. Usando Ruffini si può scrivere $P(x) = (x+1)(x^2-2x+4)$

Dato che $4-4\cdot 4 = -12 < 0$ il polinomio x^2-2x+4 non ha radici reali, dunque $x^2-2x+4>0$ $\forall x$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & & -1 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

In definitiva DOMINIO $= \{x \neq -1\}$

LIMITI

È chiaro che

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty \ ; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \quad (x \text{ "vince" sul logaritmo})$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$

DERIVATA E MONOTONIA

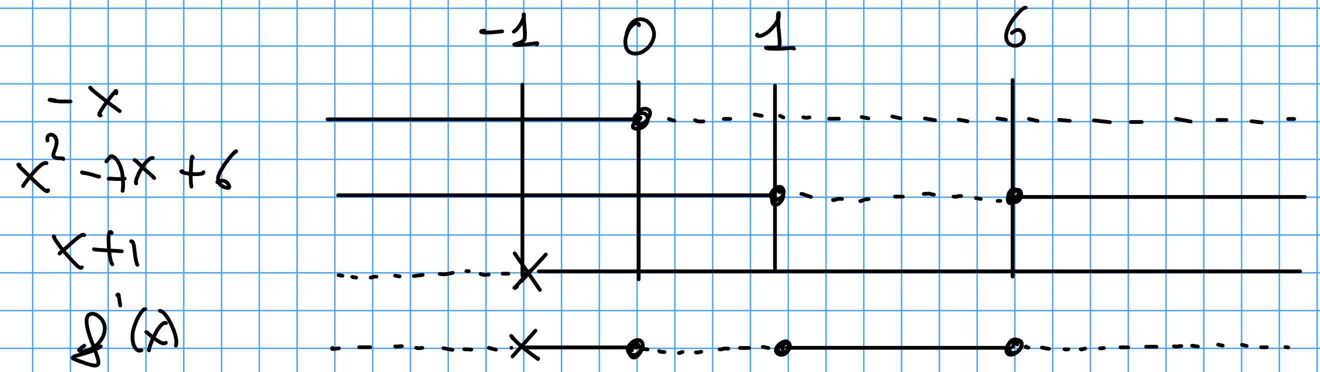
Dato che $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ si ha

$$f'(x) = \frac{2(3x^2-2x+2)}{x^3-x^2+2x+4} - 1 = \frac{6x^2-4x+4-x^3+x^2-2x-4}{x^3-x^2+2x+4} =$$

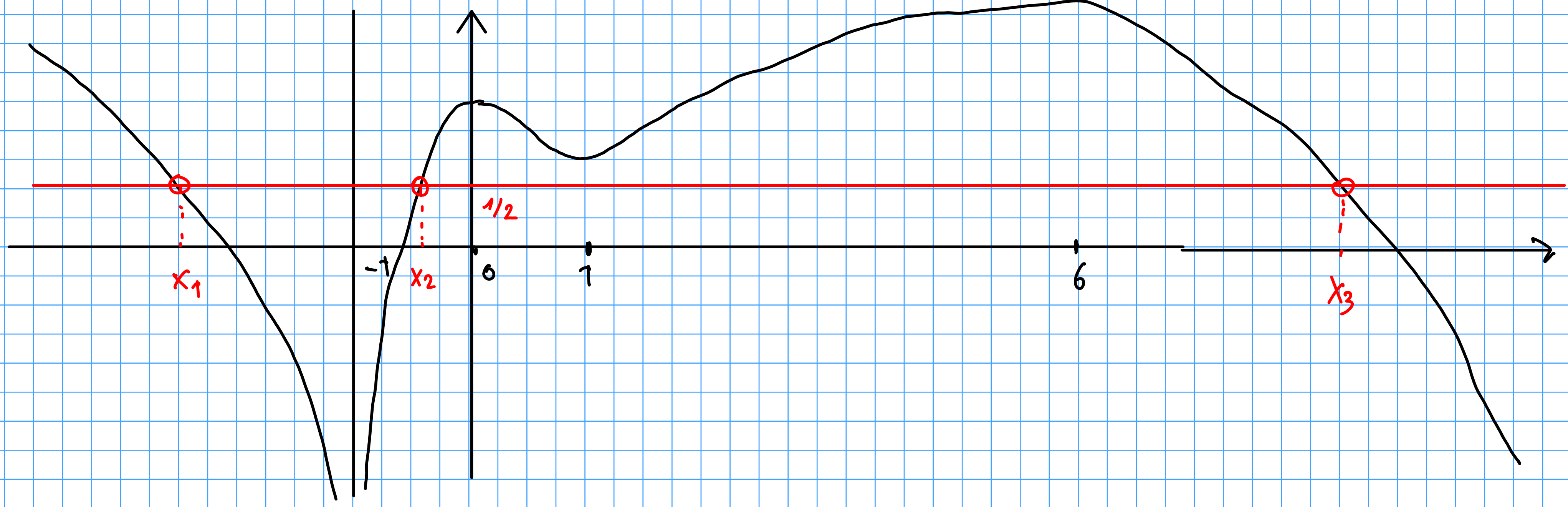
$$\frac{-x^3+7x^2-6x}{(x+1)(x^2-2x+4)} = \frac{-x\,(x^2-7x+6)}{(x+1)(x^2-2x+4)}$$

L'equazione x^2-7x+6 ha radici $x_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2} = \frac{7\pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$

Se ne ricava il seguente studio del segno di $f'(x)$



da cui il grafico di f è dato da



Per il disegno si è usato che:

$$g(0) = 2\ln(4)$$
$$g(1) = 2\ln(6) - 1$$
$$g(6) = 2\ln(196) - 6 = 4\ln(14) - 6$$

da cui $g(0) < g(6) \iff 4\ln(14) > 6 + 2\ln(4) \iff$

$$4\ln\left(\frac{14}{2}\right) > 6 \iff \ln(7) > \frac{3}{2}$$

$$\iff 7 > e^{3/2} \iff 49 > e^3$$

che è vero poiché $e^3 < 3^3 = 27 < 49$

Per l'ultimo punto si noti che $\frac{1}{2} < g(1)$, infatti

$\frac{1}{2} < 2\ln(6) - 1 \iff \ln(6) > \frac{3}{4}$ che è vero dato che $\ln(6) > \ln(e) = 1$

Dunque la retta $y = \frac{1}{2}$ interseca il grafico di f in tre punti (vedi il grafico) dando luogo a $\boxed{3}$ radici di $f(x) = \frac{1}{2}$