Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 26 gennaio 2013.

1. Sia $f(x) := \ln(\cos(\sqrt{x}))$. Si calcolino (2+2 punti):

   (a) $f'(0)$, (b) $f''(0)$.

2. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 2x^4 - x^2$. Si dica:

   (a) quanti minimi relativi ha f (2 punti);

   (b) quanti punti di massimo relativo ha f (2 punti).

3. Date le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite da $f(x) := 3 + 3x + 2^x$ e $g(x) := f^{-1}(x^2)$, si dica quanto fa $g'(2)$ (4 punti).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5 punti ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n - 1}{4 - 2n + 3n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 5n^5 + 3n + 1} - n^2}{n}$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13 punti):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sqrt[3]{8 - 24x - 6x^2} - 2}{\ln(1 + x) - x}$$

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1 + 2n)}{n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n n!}{2^n n^n}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha (1 - e^{-x^4})}{(1 + x^2)\sqrt{|x - 1|}}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5 punti):

$$y'' + 4y = x\cos(x) \qquad y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + 7 + 12e^{-x}}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' + \frac{2y}{x + 1} = 1 - x \qquad x > -1.$$

   (a) si scriva la soluzione $y(x)$ dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);

   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);

   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);

   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-1, +\infty[$ (2p.).

NOTA: Il voto complessivo si ottiene DIVIDENDO PER 2 la somma dei punti.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA ☐☐ ☐☐ 2013

voto ☐

Cognome:

Nome:

Matricola:

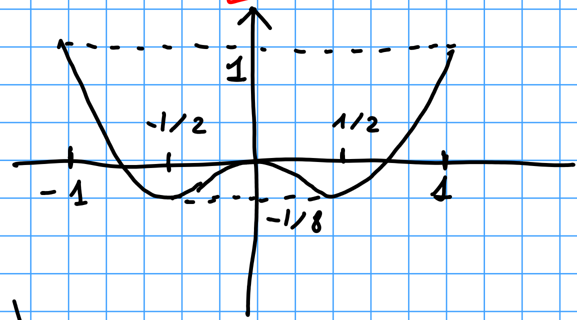
1. (a) $-1/2$ (b) $-1/6$
2. (a) 1 (b) 3
3. $\dfrac{4}{3+\ln(27)}$
4. (a) $+\infty$ (b) $5/3$
5. L'esercizio 5 va svolto (usare le facciate bianche).
6. (a) AC $\cancel{\text{C}}$ NC (b) $\cancel{\text{AC}}$ C NC
7. α $-5 < \alpha < 3/2$
8. $y(x) = -\dfrac{5}{18}\sin(2x) + \dfrac{x}{3}\cos(x) + \dfrac{2}{9}\sin(x)$
9. integ.$=$ $\ln(4/3)$
10. L'esercizio 10 va svolto (usare le facciate bianche).

(1) $f(x) = \ln(\cos(\sqrt{x})) = \ln\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) =$

$= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right)^2 + o(O(x^2)) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$

$\Rightarrow f'(0) = \boxed{-\frac{1}{2}}$; $\frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{12} \Leftrightarrow f''(0) = \boxed{-\frac{1}{6}}$

(2) Il grafico di $f(x) = 2x^4 - x^2$ è come nel disegno a destra. Dunque f ha $\boxed{1}$ minimo relativo, che è anche il minimo assoluto (e cioè $-1/8$) e $\boxed{3}$ punti di massimo relativo $(-1, 0, 1)$



(3) $f(x) = 3 + 3x + 2^x$. Allora $f(0) = 4$, $f'(x) = 3 + 2^x \cdot \ln(2) \Rightarrow$ $f'(0) = 3 + \ln(2)$. Per il teorema sulla derivata dell'inversa si ha $f^{-1}(4) = 0$ $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{3+\ln(2)}$. Se $g(x) = f^{-1}(x^2)$ allora $g'(x) = (f^{-1})'(x^2) \cdot 2x \Rightarrow g'(2) = (f^{-1})'(4) \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{\frac{4}{3+\ln(2)}}$

(4) (a) $\frac{e^n - 1}{4 - 2n + 3n^2} = \frac{e^n}{3n^2} \frac{1 - e^{-n}}{4/n^2 - 2/n + 1} = \frac{e^n}{3n^2}(1 + o(1)) \to \boxed{+\infty}$

perché $\frac{e^n}{n^2} \to +\infty$ (visto a lezione)

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{n^6+5n^5+3n+1}-n^2}{n} = n\left[\left(1+5/n+3/n^5+1/n^6\right)^{1/3}-1\right] =$

$n\left[1+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right] = \frac{5}{3}+o(1) \to \boxed{\frac{5}{3}}$

(6) (a) Poniamo $a_n := (-1)^n \dfrac{\ln(1+2n)}{n}$. Allora $|a_n| = \dfrac{\ln(1+2n)}{n} \simeq \dfrac{\ln(n)}{n}$

e dato che $\sum_n \dfrac{\ln(n)}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_n |a_n| = +\infty$: la serie $\boxed{\text{NON}}$ conv. assolut.

Però $\dfrac{\ln(1+2n)}{n}$ è decrescente se n è grande (prendo

$x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$, faccio la derivata e trovo che questa è >0 per x grande)

DUNQUE – per Leibniz – la serie a segni alterni $\sum_n a_n = \sum (-1)^n |a_n|$

$\boxed{\text{CONVERGE}}$

(b) Pongo $a_n = (-1)^n \dfrac{3^n n!}{2^n n^n} \Rightarrow |a_n| = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \dfrac{n!}{n^n}$. Applico il

criterio del rapporto a $|a_n|$ e trovo $\dfrac{|a_{n+1}|}{a_n} \to \dfrac{3}{2e} < 1$

Dunque $\sum a_n$ $\boxed{\text{è ASS. CONV.}}$

(7) Pongo $f(x) = \dfrac{x^\alpha (1-e^{-x^2})}{(1+x^2)\sqrt{|x-1|}}$. Ci sono TRE punti in cui

bisogna controllare l'integrabilità: $x=0$, $x=1$, $x=+\infty$

VICINO A ZERO $f(x) \simeq \dfrac{x^{\alpha}\cdot x^{4}}{1} = x^{\alpha+4}$. Perché f sia int. vicino a zero

bisogna che $\alpha+4>-1 \iff \alpha>-5$

VICINO A $x=1$ $f(x) \simeq \dfrac{1\ (1-e^{-1})}{2\sqrt{|x-1|}} = \dfrac{\text{cost}}{|x-1|^{1/2}} \Rightarrow$

f è int. vicino a 1, qualunque sia α, perché $\frac{1}{2}<1$

A $+\infty$ $f(x) \simeq \dfrac{x^{\alpha}}{x^{2}\sqrt{x}} = x^{\alpha-5/2}$ che è int. $\iff \alpha-5/2<-1$

$\iff \alpha<3/2$

IN DEFINITIVA $\boxed{-5<\alpha<3/2}$

(f) $y''+4y = x\cos(x)$. CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE "ACCESSORIA" in $\mathbb{C}$:

$y''+4y = x\, e^{ix}$ (NOTA CHE $\cos(x) = \mathrm{Re}\,(e^{ix})$)

Allora il pol. caratt. $P(z) = z^2+4$ ha radici $\pm 2i \Rightarrow$ le sol. dell'omogenea

sono date da $y_0 = A\,e^{2ix} + B\,e^{-2ix}$ $A, B \in \mathbb{C}$.

Cerco una sol. particolare della forma $\bar{y}(x) = (ax+b)e^{ix}$

(noto che i NON è sol. di $P_1(z)=0$) $\Rightarrow$

$$\bar{y}'(x) = a\,e^{ix} + i(ax+b)\,e^{ix} = (iax + a + bi)\,e^{ix}$$

$$\bar{y}''(x) = ia\,e^{ix} + i(iax + a + bi)\,e^{ix} = (-ax + 2ia - b)\,e^{ix}$$

$$\bar{y}''(x) + 4y(x) = (3ax + 2ia + 3b)\,e^{ix} \Rightarrow a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{2}{9}i$$ DA CUI

$$y(x) = A\,e^{2ix} + B\,e^{-2ix} + \left(\frac{3x - 2i}{9}\right)e^{ix} =$$

$$A\,e^{2ix} + B\,e^{-2ix} + \frac{3x\cos(x) + 2\sin(x)}{9} + i\,\frac{3x\sin(x) - 2\cos(x)}{9}$$ $A, B \in \mathbb{C}$

Se prendiamo la parte immaginaria troviamo le sol. dell'eq. iniziale

$$y(x) = A_1\cos(2x) + B_1\sin(2x) + \frac{3x\cos(x) + 2\sin(x)}{9} \qquad A_1, B_1 \in \mathbb{R}$$

Dato che $y(0) = A_1$, $y'(0) = \frac{5}{9} + 2B_1 \Rightarrow A_1 = 0\ \ B_1 = -\frac{5}{18}$ cioè

$$y(x) = -\frac{5}{18}\sin(2x) + \frac{x}{3}\cos(x) + \frac{2}{9}\sin(x)$$

(g) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 7 + 12e^{-x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+7e^x+12} = \quad (y = e^x, \quad e^x dx = dy)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+7y+12} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y+4)(y+3)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}\right) dy =$$

$$\left[\ln \frac{y+3}{y+4} \right]_0^{+\infty} = -\ln \frac{3}{4} = \boxed{\ln \frac{4}{3}}$$

(5) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sqrt[3]{8-24x-6x^2} - 2}{\ln(1+x) - x}$$. SI HA

$$\ln(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt[3]{8-24x-6x^2} = 2\left(1 - 3x - \frac{3}{4}x^2\right)^{1/3} =$$

$$2\left[1 + \frac{1}{3}\left(-3x - \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{9}\left(-3x + o(x)\right)^2 + o\left(O(x)^2\right)\right] =$$

$$2\left[1 - x - \frac{x^2}{4} - x^2 + o(x^2)\right] = 2\left[1 - x - \frac{5}{4}x^2 + o(x^2)\right] \Longrightarrow$$

$$e^x \sqrt[3]{8-24x-6x^2} = 2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-x-\frac{5}{4}x^2+o(x^2)\right) =$$

$$2\left(1-\cancel{x}-\frac{5}{4}x^2+o(x^2)+\cancel{x}-x^2+o(x^2)+\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o(o(x^2))\right) =$$

$$2\left(1-\frac{7}{4}x^2+o(x^2)\right) = 2-\frac{7}{2}x^2+o(x^2) \Longrightarrow$$

$$\frac{e^x\sqrt[3]{8-24x-6x^2}-2}{\ln(1+x)-x} = \frac{2-\frac{7}{2}x^2+o(x^2)-2}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x} = \frac{-\frac{7}{2}x^2+o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} \rightarrow \boxed{7}$$

10

$$y' = \frac{2y}{x+1} + 1-x \qquad y(0)=y_0 \quad . \text{ ALLORA}$$

(a)

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left\{y_0+\int_0^x (1-t)(1+t)^2 dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}\left\{y_0+\int_0^x (1+t-t^2-t^3)dt\right\} = \boxed{\frac{1}{(1+x)^2}\left\{y_0+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right\}}$$

(b)

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > 5/12 \\ 0 & \text{se } y_0 = 5/12 \\ -\infty & \text{se } y_0 < 5/12 \end{cases}$$

perché la grafo calcolata in -1 fa $y_0 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = y_0 - \frac{5}{12}$;

nel caso $y_0 = 5/12$ si ha una forma $0/0$ che si risolve con de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) \underset{(Hôp)}{=} \lim_{x\to -1} \frac{1+x-x^2-x^3}{2(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(1-x)(1+x)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(1+x)}} = 0$$

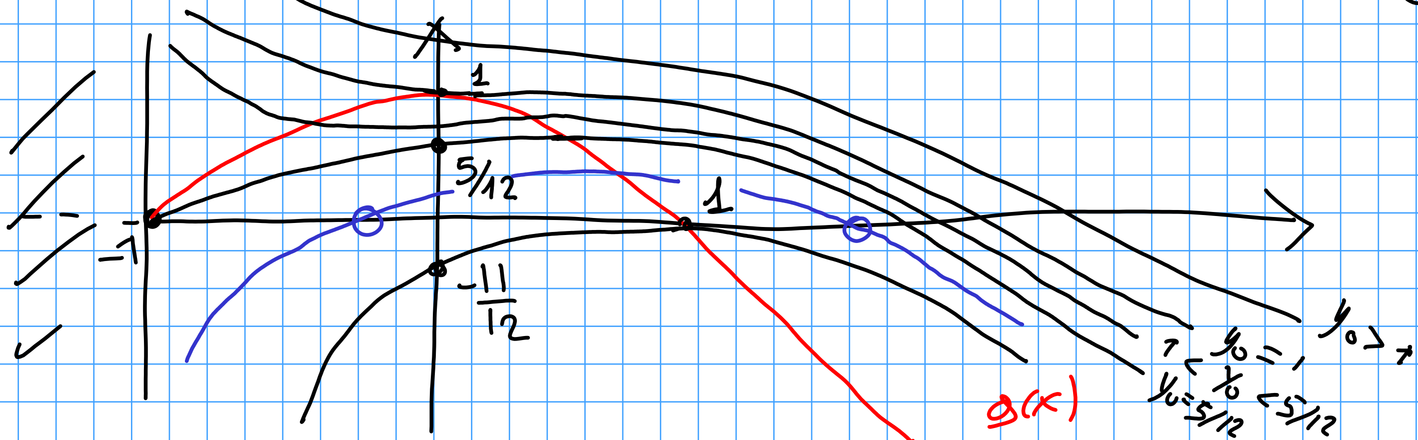
(c) Poniamo $F(x,y) = -\frac{2y}{1+x} + 1 - x$ di modo che l'eq. diff. si scrive $y' = F(x,y)$. Studiamo il segno di $F(x,y)$:

$F(x,y) > 0 \iff 2y < (1-x)(1+x)$ cioè $2y \leq g(x)$

dove $g(x) = 1-x^2$ (il fatto se $1+x \geq 0$)

Analogamente $F(x,y) < 0 \iff y > g(x)$ e $F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$

Tenendo conto di questo si hanno i seguenti grafici



(d) Troviamo il valore di y_0 per la curva y che verifica $y(1)=0$:

$$0 = \frac{1}{(1+1)^2}\left\{ y_0 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \iff$$

$$0 = y_0 + \frac{11}{12} \iff y_0 = -\frac{11}{12}$$

Si vede allora che le curve che tagliano due volte l'asse x sono individuate da

$$\boxed{-\frac{11}{12} < y_0 < \frac{5}{12}}$$