Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 7 gennaio 2013.

1. Sia $f(x) := \sqrt{3+\cos(2x)}$. Si calcolino (2+2 punti):

   $(a)\quad f^{(2)}(0), \qquad (b)\quad f^{(4)}(0).$

2. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := x^2 - 2x^4$. Si dica:
   (a) quanti punti stazionari ha f (2 punti);
   (b) quanti punti di minimo relativo ha f (2 punti).

3. Date le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite da $f(x) := 2x + 3^x$ e $g(x) := f^{-1}(x^2)$, si dica quanto fa $g'(1)$ (4 punti).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5 punti ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+6n^2)}{4-2n+3n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+2n+3} - n)$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13 punti):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{8x^2}\cos(4x) - 1}{\sqrt[3]{1+2x^4} - 1}$$

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\, n!}{n^n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{n^2}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}(1-e^{-x^2})}{\sqrt{4+x^3}}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5 punti):

$$y'' + 4y = x\sin(x) \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\tan^2(3x) + 4\tan(3x) + 3}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' + \frac{2y}{x+1} = \frac{2x+1}{2x+5} \qquad x > -1.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-1, +\infty[$ (2p.).

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA | | | | | 2013

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

1. (a) -1 (b) $5/2$

2. (a) 3 (b) 3

3. $\frac{2}{2+\ln(3)}$

4. (a) 0 (b) $2/3$

5. L'esercizio 5 va svolto (usare le facciate bianche).

6. (a) ~~AC~~ | C | NC (b) ~~AC~~ | C | NC

7. α $-3 < \alpha < 1/2$

8. $y(x) = \frac{2}{9}\left(\cos(2x) - \cos(x)\right) + \frac{x}{3}\sin(x)$

9. integ.$= \frac{\pi + \ln(3)}{60}$

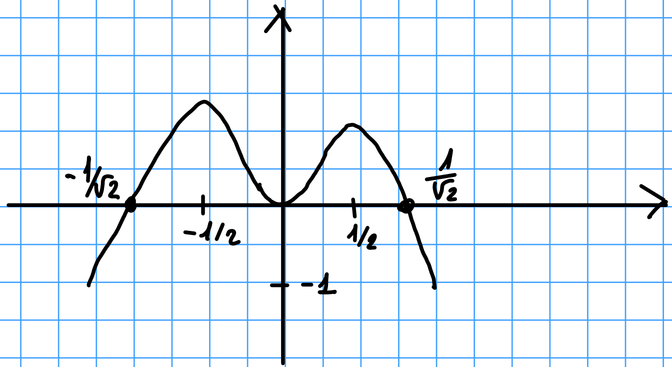
10. L'esercizio 10 va svolto (usare le facciate bianche).

1) $f(x) = \sqrt{3+\cos(2x)} = \sqrt{\underbrace{3+1}_{4} - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + o(x^4)} = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}$

$$= 2\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + o\left(\left(O(x^2)\right)^2\right)\right] =$$

$$2 \underbrace{- \frac{x^2}{2}}_{\frac{f''(0)}{2}} + \underbrace{\frac{5}{48}x^4}_{\frac{f^{IV}(0)}{24}} + o(x^4)\Big] \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f''(0) = -1 \\ f^{IV}(0) = \frac{5}{2} \end{array}}$$

2) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x^4$. Si vede facilmente che il grafico di f è fatto come indicato a destra.



DUNQUE f HA 3 punti stazionari $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e 3 punti di minimo relativo $(0, -1, 1)$

3) $f(x) = 2x + 3^x$. Allora $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$

INOLTRE $f'(x) = 2 + 3^x \ln(3)$, $f'(0) = 2 + \ln(3) \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{2+\ln(3)}$

Infine $h(x) = f^{-1}(x^2) \Rightarrow h'(x) = (f^{-1})'(x^2) \cdot 2x$ e quindi

$$h'(1) = (f^{-1})'(1^2)(2 \cdot 1) = (f^{-1})'(1) \cdot 2 = \boxed{\frac{2}{2+\ln(3)}}$$

4) (a) $$\frac{\ln(1+6n^2)}{4-2n+3n^2} = \frac{\ln\left[6n^2 \cdot (1/6n^2 + 1)\right]}{3n^2\left[4/3n^2 - 2/3n + 1\right]} = \frac{2\ln(n) + \ln(6) + o(1)}{3n^2(1+o(1))}$$

$$= \frac{2\ln(n)}{3n^2}(1+o(1)) \to 0 \qquad \text{PERCHÉ} \quad \frac{\ln(n)}{n^2} \to \boxed{0}$$

(limite notevole)

(b) $$n\left(\sqrt[3]{n^3+2n+3} - n\right) = n^2\left[\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)^{1/3} - 1\right] =$$

$$n^2\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right) + o\left(\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right) - 1\right] = n^2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o\left(O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]$$

$$= n^2\left[\frac{2}{3}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{2}{3} + o(1) \to \boxed{\frac{2}{3}}$$

6) (a) $\sqrt[n]{n} \to 1$ DUNQUE $\dfrac{\sqrt[n]{n}\, n!}{n^n} \simeq \dfrac{n!}{n^n}$ e quindi

basta capire se $\sum_n \dfrac{n!}{n^n}$ converge o diverge (altro non può fare essendo a termini ≥ 0). Usando il criterio del rapporto:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\; n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$$

DUNQUE $\sum_n \frac{n!}{n^n}$ CONV. $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{\sqrt[n]{n}\; n!}{n^n}$ CONV. $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{\sqrt[n]{n}\; n!}{n^n}$ $\boxed{\text{CONV. ASS.}}$

(b) Si ha $\frac{\ln(1+n)}{n^2} = \frac{\ln(n) + \ln\left(\frac{1}{n}+1\right)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n^2}\left(1+o(1)\right)$

DUNQUE $\frac{\ln(1+n)}{n^2} \simeq \frac{\ln(n)}{n^2}$. Dato che $\sum_n \frac{\ln(n)}{n^2}$ CONVERGE (VISTO A LEZIONE), anche $\sum_n \frac{\ln(1+n)}{n^2}$ CONVERGE.

MA ALLORA $\sum_n (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{n^2}$ converge ASSOLUTAMENTE

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha (1-e^{-x^2})}{\sqrt{4+x^3}}\, dx$. Pongo $f(x) = \frac{x^\alpha (1-e^{-x^2})}{\sqrt{4+x^3}}$

$f(x)$ NON HA SINGOLARITÀ ECCETTO CHE IN $x=0$ (se $\alpha<0$)

DUNQUE VA VISTA L'INTEGRABILITÀ VICINO A ZERO E ALL'INFINITO.

VICINO A ZERO $\quad f(x) = \dfrac{x^{\alpha}\left(1-\left(1-x^2+o(x^2)\right)\right)}{\sqrt{4+o(1)}} = \dfrac{x^{\alpha+2}}{4}(1+o(1)) \simeq \dfrac{x^{\alpha+2}}{4}$

LA FUNZIONE $\dfrac{x^{\alpha+2}}{4}$ è INTEGRABILE SU $]0,1] \iff \alpha+2>-1 \iff$

$$\boxed{\alpha > -3}$$

ALL'INFINITO $\quad f(x) = \dfrac{x^{\alpha}(1+o(1))}{\sqrt{x^3+o(1)}} = \dfrac{x^{\alpha}}{x^{3/2}}(1+o(1)) \simeq x^{\alpha-3/2}$

LA FUNZIONE $x^{\alpha-3/2}$ È INT. SU $[1,+\infty[\iff \alpha-3/2<-1 \iff \alpha<1/2$

DUNQUE $f(x)$ È INT. SU $]0,+\infty[\iff \boxed{-3<\alpha<1/2}$

8) $\quad y''+4y = x\sin(x) \qquad$ Polinomio caratt. z^2+4; radici $\pm 2i$

SOL. OMOGENEA $\longrightarrow \quad y_0(x) = A\cos(2x)+B\sin(2x)$

SOL. PARTICOLARE $\quad \bar{y}(x) = (\alpha x+\beta)\cos(x) + (\gamma x+\delta)\sin(x)$

$\bar{y}(x)' = (\gamma x+\alpha+\delta)\cos(x) - (\alpha x+\beta-\gamma)\sin(x)$

$\bar{y}''(x) = -(\alpha x+\beta-2\gamma)\cos(x) - (\gamma x+\delta+2\alpha)\sin(x)$

$$\bar{y}''(x)+4\bar{y}(x)=(3\alpha x+3\beta+2\gamma)\cos(x)+(3\gamma-2\alpha+3\delta)\sin(x)$$

DUNQUE
$$\begin{cases}\alpha=0\\ 3\beta+2\gamma=0\\ 3\gamma=1\\ -2\alpha+3\delta=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=0\,,\ \delta=0\\ \gamma=\frac{1}{3}\\ \beta=-\frac{2}{9}\end{cases}$$

cioè
$$\bar{y}(x)=\frac{x}{3}\sin(x)-\frac{2}{9}\cos(x) \quad e$$

$$y(x)=A\cos(2x)+B\sin(2x)+\frac{x}{3}\sin(x)-\frac{2}{9}\cos(x)$$

IMPONENDO $y(0)=0$ si trova $A=\frac{2}{9}$

IMPONENDO $y'(0)=0$ si trova $2B=0 \iff B=0$ DUNQUE

$$y(x)=\frac{2}{9}\left(\cos(2x)-\cos(x)\right)+\frac{x}{3}\sin(x)$$

(9) $$\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\tan^2(3x)+4\tan(3x)+3}$$

Sostituzione $t=\tan(3x)$

$$x=\frac{1}{3}\arctan(t)$$

$$dx=\frac{1}{3}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+4t+3)(1+t^2)} = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t+3)(t^2+1)} = (*)$$

$$\frac{1}{(t+1)(t+3)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+3} + \frac{Ct+1}{t^2+1} = \frac{A(t+3)(t^2+1)+B(t+1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2+4t+3)}{(t+1)(t+3)(t^2+1)}$$

$$= \frac{t^3(A+B+C)+t^2(3A+B+4C+D)+t(A+B+3C+4D)+3A+B+3D}{(t+1)(t+3)(t^2+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C = 0 \\ 3A+B+4C+D = 0 \\ A+B+3C+4D = 0 \\ 3A+B+3D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C+4D = 0 & (\mathrm{III}-\mathrm{I}) \\ -4C+2D = 1 & (\mathrm{IV}-\mathrm{II}) \\ A+B+C = 0 & (\mathrm{I}) \\ 3A+B+4C+D = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} D = 1/10 \\ C = -2/10 \\ A+B = 2/10 \\ 3A+B = 7/10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 1/10 & (= 2/20) \\ C = -2/10 & (=-4/20) \\ A = 1/4 & (= 5/20) \\ B = -\frac{1}{20} \end{cases}$$

$$(*) = \frac{1}{60}\int_0^{+\infty}\left(\frac{5}{t+1} - \frac{1}{t+3} - \frac{4t}{t^2+1} + \frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$\frac{1}{60}\left[\ln \frac{(t+1)^5}{(t+3)(t^2+1)^2} + 2\arctan(t) \right]_0^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{60}\left(\pi - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{60}\left(\pi + \ln(3)\right)$$

5) USIAMO TAYLOR

$$e^{8x^2} = 1 + 8x^2 + \frac{64x^4}{2} + o(x^4) = 1 + 8x^2 + 32x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(4x) = 1 - \frac{16x^2}{2} + \frac{256x^4}{24} + o(x^4) = 1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow e^{8x^2}\cos(4x) = \left(1 + 8x^2 + 32x^4 + o(x^4)\right)\left(1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$1 - \cancel{8x^2} + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4) + \cancel{8x^2} - 64x^4 + o(x^4) + 32x^4 + o(x^4) + o(x^4) =$$

$$1 + \left(\frac{32}{3} - 64 + 32\right)x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{64}{3}x^4 + o(x^4)$$

INOLTRE

$$\sqrt[3]{1 + 2x^4} = 1 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

IN DEFINITIVA

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{8x^2}\cos(4x) - 1}{\sqrt[3]{1+2x^4} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{64}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{64}{3}}{\frac{2}{3}} = -32$$

(10)

$$y' = -\frac{2y}{x+1} + \frac{2x+1}{2x+5}$$

(a) Usando la formula risolutiva:

$$a(x) = -\frac{2}{x+1} \qquad A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = -2\ln(x+1) = \ln\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left\{ y(0) + \int_0^x \frac{2t+1}{2t+5}(t+1)^2\,dt \right\} =$$

(divisione tra polinomi! $\star$)

$$\frac{1}{(x+1)^2}\left\{ y_0 + \int_0^x \left(2+t^2 - \frac{9}{2t+5}\right) dt \right\} =$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}\left\{ y_0 + 2x + \frac{x^3}{3} - \frac{9}{2}\ln(2x+5) + \frac{9}{2}\ln 5 \right\} =$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}\left\{ c + \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{9}{2}\ln(2x+5) \right\} \quad \text{DOVE } c = y_0 + \frac{9}{2}\ln(5)$$

(b)
$$\boxed{\lim_{x \to -1^+} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > \frac{7}{3} + \frac{9}{2}\ln(3) \boxed{=: c_1} \\ 0 & \text{se } c = c_1 \\ -\infty & \text{se } c < c_1 \end{cases}}$$

$\star$ Corrisponde a $y_0 = \underbrace{\frac{7}{3} - \frac{9}{2}\ln\frac{5}{3}}_{= y_1}$

I casi con $c \neq c_1$ sono immediati; nel caso $c = c_1$ si ha una forma $\frac{0}{0}$ che si può risolvere con de l'Hôpital

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{c_1 + \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{9}{2}\ln(2x+5)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 + 2 - \frac{9}{2x+5}}{2(x+1)} \overset{*}{=}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2(2x+1)(x+1)^2}{2(2x+5)(x+1)} = 0$$

SI È USATA LA DIVISIONE FATTA SOPRA IN $*$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} y(x) = +\infty}$$

$\left(y(x) \simeq \frac{x^3}{3} \frac{1}{(x+1)^2} \to +\infty \right)$

(c) Per studiare la monotonia scriviamo l'equazione come

$$y' = F(x,y) \qquad \text{DOVE} \quad F(x,y) = -\frac{2}{x+1} y + \frac{2x+1}{2x+5}$$

e cerchiamo le regioni del piano in cui $F > 0 \,/\, F < 0 \,/\, F = 0$ (LIMITATAMENTE A $x > -1$). Si ha ($\underline{\text{se } x > -1}$)

$$F(x,y) > 0 \iff y < \frac{(2x+1)(x+1)}{2(2x+5)} =: g(x)$$

(e analogamente $F(x,y) < 0 \iff y > g(x)$).

Studiamo il grafico di $g(x)$ in $(x \geq -1)$. Si ha

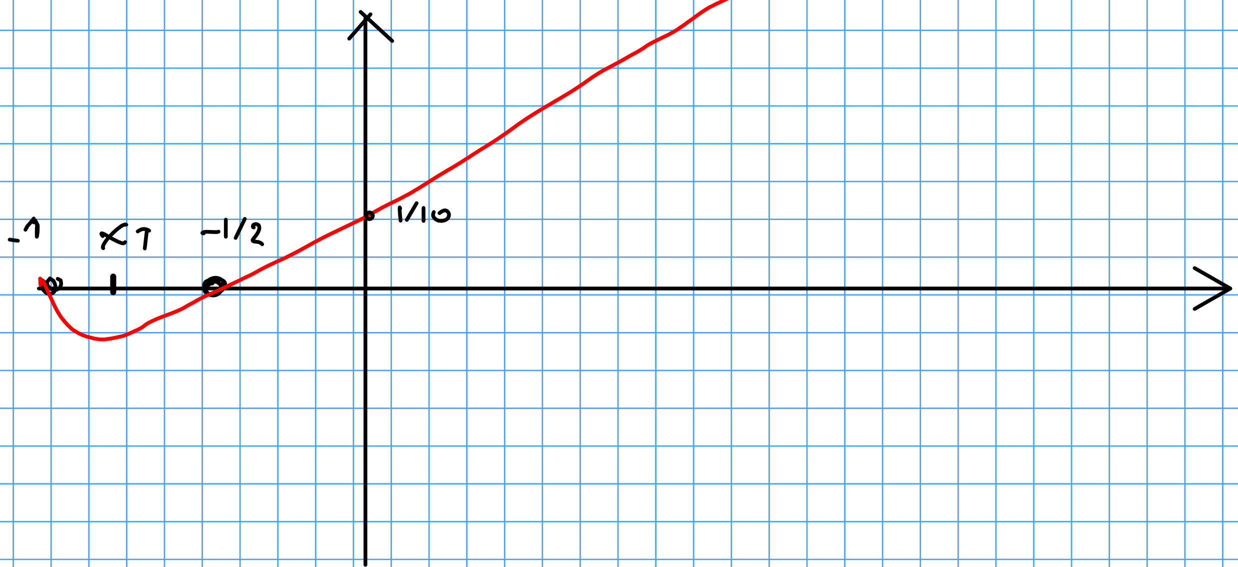
$$g(-1) = g(-1/2) = 0. \qquad g(0) = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

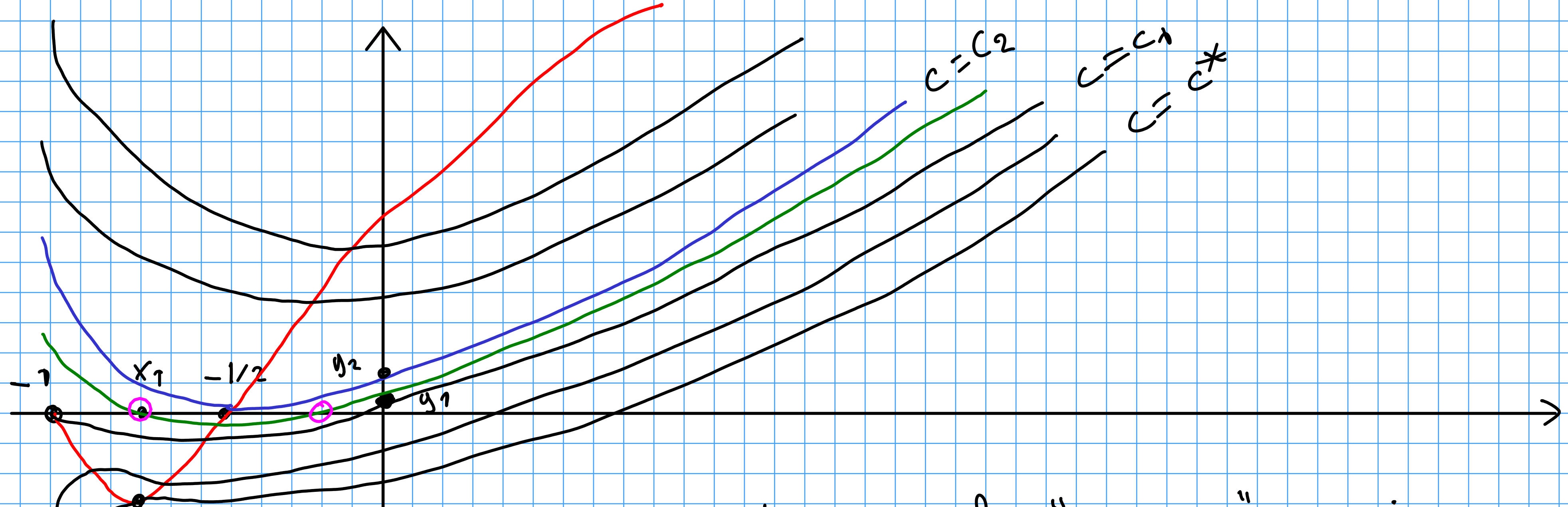
$$g'(x) = \frac{4x^2+20x+13}{2(2x+5)^2}. \qquad g'(x) = 0 \iff x = \frac{-10 \pm 4\sqrt{3}}{4}$$

di cui ci interessa solo $x_1 = -\frac{5}{2} + \sqrt{3}$

Se ne ricava il seguente grafico di g



Ricordando che y cresce dove $y < g(x)$ e decresce dove $y(x) > g(x)$ (mentre ho derivata nulla dove $y(x) = g(x)$) si ottengono i grafici seguenti



Le curve che "separano" i vari comportamenti sono quelle che tende a zero in -1 $(c=c_1)$

e quella per cui $y(x_1)=g(x_1)=-\frac{7}{4}+\sqrt{3}$

(d) Dal grafico si vede che le curve che attraversano due volte l'asse x sono quelle comprese dalla sol con $c=c_1$ (e cioè con $y_0=-\frac{7}{3}-\frac{9}{2}\ln(5)$) e la soluzione che passa per zero in $-\frac{1}{2}$, cioè

$$0=\frac{1}{(1-1/2)^2}\left(c+\frac{(-1/2)^3}{2}+(-1/2)\cdot 2-\frac{9}{2}\ln(-1+5)\right)\iff$$

$$c - \frac{1}{8} - 1 - 9\ln(2) = 0 \iff c = 9\ln(2) + \frac{9}{8} \boxed{=: c_2}$$

$$\iff y_0 = \frac{9}{8} + 9\ln(2) - \frac{9}{2}\ln(5) = \frac{9}{8} + \frac{9}{2}\ln\left(\frac{4}{5}\right) \boxed{=: y_2}$$

DUNQUE SI VUOLE $\boxed{\underbrace{\frac{7}{3} - \frac{9}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)}_{y_1} < y_0 < \underbrace{\frac{9}{8} - \frac{9}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)}_{y_2}}$