Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 10 settembre

1. Sia $f(x) := \ln(\sqrt[3]{\cos(x)})$. Si calcolino (2+2p.): $(a)\quad f^{(2)}(0)$, $\qquad (b)\quad f^{(4)}(0)$.

2. Sia $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 2x^3 - 15x^2 + 36x$ Si dica quanto fanno (2p. ciascuno):

   $(a)\quad \min_{[0,3]} f, \qquad (b)\quad \max_{[0,3]} f.$

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) := 3 + 3x + e^{3x}$ e $g(x) = 4x^2$. Se $h(x) = f^{-1}(g(x))$, si dica (4p.) quanto fa $h'(1)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(2n^2) - \cos(n^2)}{n^4}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)e^{\frac{9x^2}{2}} - \cos(3x^2)}{\tan(x^2)\sin^2(x)}$$

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{4n} - 1}{n} \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)\right)$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\left(\frac{x}{x^2+5x+6}\right)^{\alpha} dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (eventualmente in forma implicita) (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):

$$y' = y^2 - 4 \qquad y(0) = 0.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(3x+4)\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x+4} + \frac{x-4}{x+5} \qquad x > -4.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -4^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-4, +\infty[$ (2p.).

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 10 09 2012

voto

Cognome: CORREZIONE

Nome:

Matricola:

Fila:

1. (a) $-1/3$ (b) $-2/3$

2. (a) 0 (b) 28

3. $4/3$

4. (a) 0 (b) 0

6. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC C ~~NC~~

7. α $\alpha > -1$

8. $y(x) =$ $y(x) = 2\,\dfrac{1-e^{4x}}{1+e^{4x}} \qquad x \in \mathbb{R}$

9. integ.= $\dfrac{1}{5}\ln(6)$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione degli esercizi 5 e 10.

(1) $f(x) = \frac{1}{3}\ln(\cos(x)) = \frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) =$

$\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2\right)\right) =$

$\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)\right) =$

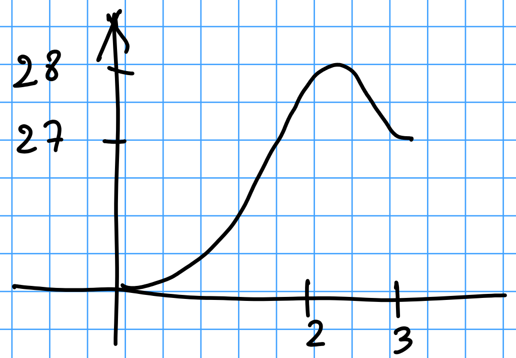
$-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{36}+o(x^4)$ QUINDI

$\frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{6} \iff f''(0) = \boxed{-\frac{1}{3}}$; $\frac{f^{IV}(0)}{24} = -\frac{1}{36} \iff f^{IV}(0) = \boxed{-\frac{2}{3}}$

(2) $f(x) = 2x^3-15x^2+36x$ su $[0,3]$

$f(0) = 0$, $f(3) = 27$, $f'(x) = 6x^2-30+36 = 6(x-2)(x-3)$

$f'(x) = 0 \iff x = 2 \,/\, x = 3$ $f(2) = 28$



$\Rightarrow$ MAX $= \boxed{28}$

MIN $= \boxed{0}$

(3) $f(x) = 3 + 3x + e^{3x}$ $\qquad f'(x) = 3 + 3e^{3x}$

$f(0) = 4$ $\qquad f'(0) = 6$ $\qquad$ DA CUI

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}$$

$g(x) = 4x^2$ $\qquad g'(x) = 8x$ $\Rightarrow$ $g(1) = 4$ $\qquad g'(1) = 8$

ALLORA $\quad h'(1) = (f^{-1})'(g(1)) \cdot g'(1) = (f^{-1})'(4) \cdot 8 = \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3}}$

(4) (a) dato che $\cos(2n^2) - \cos(n^2)$ è limitata $\Rightarrow$

$$\frac{\cos(2n^2) - \cos(n^2)}{n^4} \to \boxed{0}$$

(b) dato che $\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \to e^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2n^2}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n \to \boxed{0}$$

(6) (a) Se $a_n = \frac{\sqrt[n]{4n-1}}{n} \Rightarrow a_n = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln(4n)} - 1}{n} = \frac{1 + \frac{\ln(4n)}{n} + o\left(\frac{\ln(4n)}{n}\right) - 1}{n}$

$$= \frac{\ln(4n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(4n)}{n^2}\right).$$ Dato che $\sum_n \frac{\ln 4n}{n^2}$

converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ conv. $\Rightarrow$ $\sum_n (-1)^n a_n$ $\boxed{\text{CONV. ASSOL.}}$

(b) Dato che $\cos\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right) \to \cos(0) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ $a_n := (-1)^n \cos\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)$ NON TENDE A ZERO $\Rightarrow$

$\sum_n a_n$ $\boxed{\text{NON CONVERGE}}$

(7) $$f(x) = \frac{1}{1+x^4}\left(\frac{x}{x^2+5x+6}\right)^\alpha = \frac{1}{1+x^4}\left(\frac{x}{(x+3)(x+2)}\right)^\alpha$$

Dato che il denominatore non ha radici >0 $\Rightarrow$ la convergenza di $\int^{+\infty} f(x)\,dx$ dipende dall'integrabilità di $f(x)$ vicino a $x=0$ e all'infinito.

$\underline{x \sim 0}$ $\quad f(x) \simeq \left(\frac{x}{6}\right)^\alpha$. Allora f è int. vicino a zero $\Leftrightarrow$ $\alpha > -1$

$\underline{x \sim +\infty}$ $\quad f(x) \approx \dfrac{x^\alpha}{x^4 (x^2)^\alpha} = \dfrac{1}{x^{4+\alpha}}$, che è int. $\Leftrightarrow 4+\alpha > 1$

cioè $\alpha > -3$

L'INTERSEZIONE DELLE DUE CONDIZIONI DÀ $\boxed{\alpha > -1}$

(8) $y'(x) = y(x)^2 - 4 \qquad y(0) = 0$ allora

$$\int_0^{y(x)} \frac{ds}{s^2-4} = x \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_0^{y(x)} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\right) ds = x \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln \left| \frac{s-2}{s+2} \right| \right]_0^{y(x)} = 4x \Leftrightarrow \ln \frac{2-y(x)}{2+y(x)} = 4x$$

NELL'ULTIMO PASSAGGIO SI VEDE CHE DEVE ESSERE $-2 < y(x) < 2$ PERCHÉ SI POSSA INTEGRARE. INVERTIAMO $s \mapsto \dfrac{2-s}{2+s}$

$$t = \frac{2-s}{2+s} \Leftrightarrow 2t + st = 2 - s \Leftrightarrow s(t+1) = 2 - 2t$$

$$\Leftrightarrow s = 2\,\frac{1-t}{1+t} \Rightarrow y(x) = 2\,\frac{1-e^{4x}}{1+e^{4x}}$$

PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, dato che la $y(x)$ quindi è sempre in $]-2,2[$

(4) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{3x+4}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = (\ast)$$

Uso la sostituzione $\sqrt{x^2+1} = x+t \iff x^2+1 = x^2+2xt+t^2$

$\iff$ $x = \frac{1-t^2}{2t}$. Ne segue $dx = -\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt$

$x+t = \frac{1+t^2}{2t}$, $3x+4 = \frac{3-3t^2}{2t}+4 = \frac{3+8t-3t^2}{2t}$

$$(\ast) = \int_1^0 \frac{2\cancel{t}}{3+8t-3t^2}\,\frac{\cancel{2}\,\cancel{t}}{\cancel{1+t^2}}\,(-1)\,\frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{2\,dt}{3+8t-3t^2} =$$

$$\frac{1}{5}\int_0^1 \left(\frac{3}{1+3t}-\frac{1}{t-3}\right)dt = \frac{1}{5}\left[\ln\left|\frac{1+3t}{t-3}\right|\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{5}\left(\ln 2 - \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \boxed{\frac{\ln(6)}{5}}$$

(5) $$\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{24}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{\frac{9}{2}x^2} = 1 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2}\,\frac{81}{4}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \cos(3x)\, e^{\frac{9}{2}x^2} = \left(1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{8}x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= 1 - \cancel{\frac{9}{2}x^2} + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4) + \cancel{\frac{9}{2}x^2} - \frac{81}{4}x^4 + o(x^4) + \frac{81}{8}x^4 + o(x^4) =$$

$$1 + \frac{27 - 6\cdot 27 + 3\cdot 27}{8}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{27}{4}x^4 + o(x^4)$$

INOLTRE $\cos(3x^2) = 1 - \frac{9x^4}{2} + o(x^4) \Rightarrow$

$$\frac{\cos(3x)\, e^{\frac{9}{2}x^2} - \cos(3x^2)}{\tan(x^2)\,\sin^2(x)} = \frac{\cancel{1} - \frac{27}{4}x^4 + o(x^4) - \left(\cancel{1} - \frac{9}{2}x^4 + o(x^4)\right)}{(x^2 + o(x^2))(x + o(x))^2} =$$

$$\frac{-\frac{9}{4}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \longrightarrow \boxed{-\frac{9}{4}}$$

(10) $y' = \frac{2y}{x+4} + \frac{x-4}{x+5}$ $\quad x > -4 \quad y(0) = y_0$

(a) Applicando la formula: $A(x) = \int_0^x \frac{2}{t+4}\,dt = 2\ln|t+4|\Big|_0^x =$

$$2\ln\frac{x+4}{4} = \ln\frac{(x+4)^2}{16} \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{(x+4)^2}{16}\left\{ y_0 + \int_0^x \frac{16}{(t+4)^2}\,\frac{t-4}{t+5}\,dt \right\} =$$

$$(x+4)^2\left\{ \frac{y_0}{16} + \int_0^x \frac{t-4}{(t+4)^2(t+5)} \right\} = \quad \text{(rid. fratti semplici)}$$

$$(x+4)^2\left\{ \frac{y_0}{16} + \int_0^x \left(-\frac{8}{(t+4)^2} + \frac{9}{t+4} - \frac{9}{t+5} \right) dt \right\} =$$

$$(x+4)^2\left\{ \frac{y_0}{16} + \left[\frac{8}{t+4} + 9\ln\frac{t+4}{t+5} \right]_0^x \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) \quad (x+4)^2\left\{ c + \frac{8}{x+4} + 9\ln\frac{x+4}{x+5} \right\}} \quad \text{DOVE} \quad \boxed{c = \frac{y_0}{16} - 2 + \ln\frac{5}{4}}$$

(b)

$$\lim_{x\to -4^+} y(x) = \lim_{x\to -4^+} (x+4)\left\{ \underset{\downarrow\, 0}{c(x+4)} + 8 + \underbrace{9(x+4)\ln\frac{x+4}{x+5}}_{\downarrow\, 0} \right\} = \boxed{0^+}$$

$$\lim_{x\to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \iff y_0 \geq 2 + \ln\frac{4}{5} =: \tilde{y}\ ) \\ -\infty & \text{se } c \leq 0 \iff y_0 \geq \tilde{y} \end{cases}$$

Il caso $c=0$ dà una forma indeterminata che si può risolvere con Taylor:

$$(x+4)^2\left\{\frac{8}{x+4}+9\ln\frac{x+4}{x+5}\right\} = (x+4)^2\left\{\frac{8}{x+4}-9\ln\left(1+\frac{1}{x+4}\right)\right\} =$$

$$(x+4)^2\left\{\frac{8}{x+4}-\frac{9}{x+4}+o\left(\frac{1}{x+4}\right)\right\} = (x+4)^2\left\{-\frac{1}{x+4}\left(1+o(1)\right)\right\}$$

$$= -(x+4)\left(1+o(1)\right) \to -\infty$$

(c) Posto $F(x,y) := \dfrac{2y}{x+4}+\dfrac{x-4}{x+5}$ studiamo il segno di F.

$x>-4$

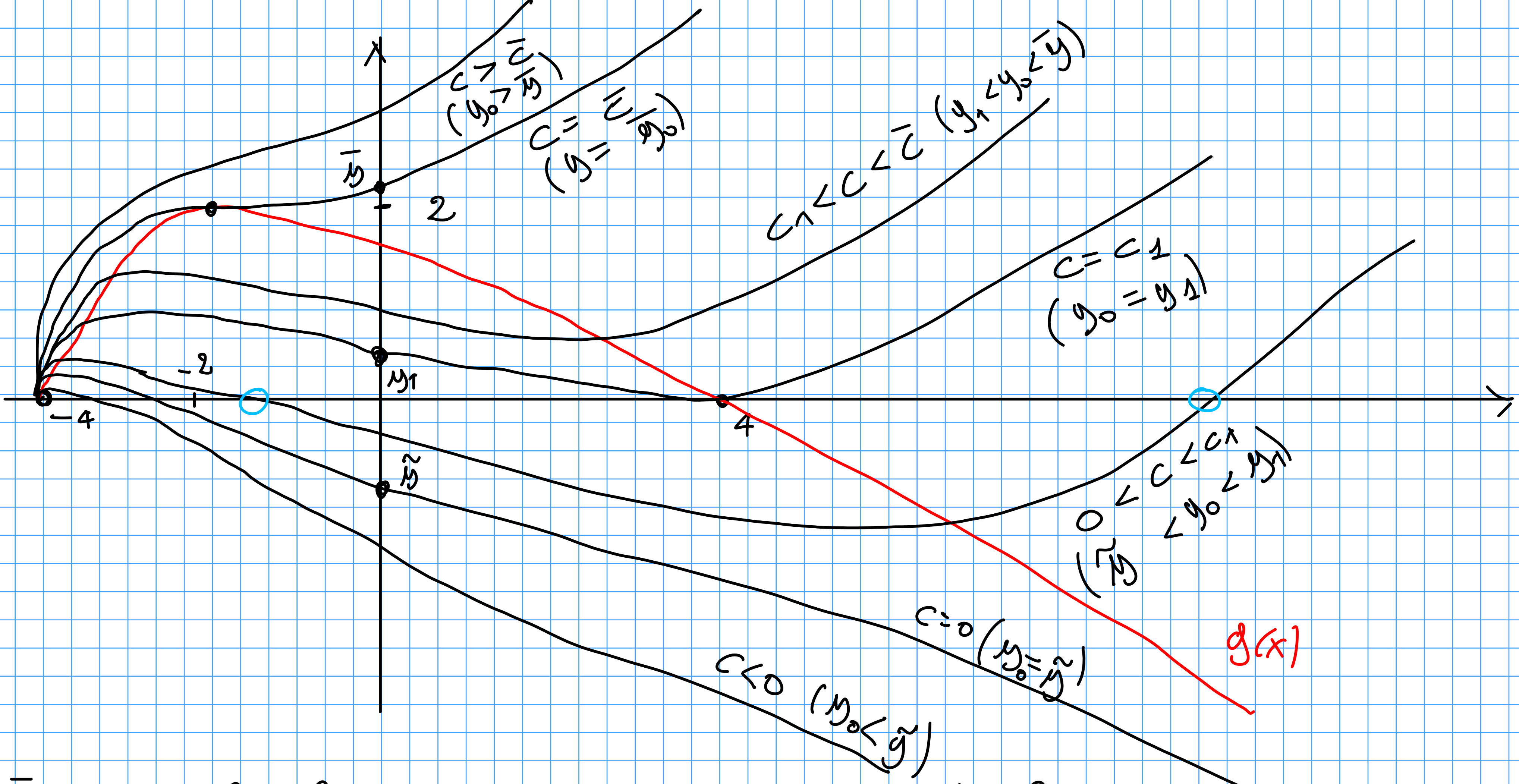
$$F(x,y)>0 \iff 2y > -\frac{x^2-16}{x+5} \iff y > \frac{16-x^2}{2(x+5)} =: g(x)$$

Studio $g(x)$ su $[-4,+\infty[$

$g(-4)=0$ $\quad (g(4)=0)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$$g'(x) = \frac{16+10x+x^2}{2(x+5)^2} \qquad g'(x)=0 \iff x = -5\pm\sqrt{25-16} = \begin{cases} -5+3=-2 \\ -5-3=-8 \end{cases}$$

$g(-2)=2$



$\bar{c}$ è il valore di c per cui $y(-2) = 2$

cioè $\bar{c} = -7/2 + 9\ln(3/2)$

c_1 è il valore di c per cui $y(4) = 0$, cioè $c_1 = -1 + \ln(9/8)$

(d) Dai grafici si vede che $y(x)$ attraversa due volte l'asse x

se e solo se $0 < c < c_1$ $(\tilde{y} < y_0 < y_1)$