Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 3 settembre 2012

1. Sia $f(x) := \ln(\sqrt[3]{1+3x^2})$. Si calcolino (2+2p.): $(a)\quad f^{(2)}(0), \qquad (b)\quad f^{(4)}(0)$.

2. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 6x^5 - 5x^3 + 1$ Si dica quanto fanno (2p. ciascuno): $(a)\quad \min_{[0,1]} f, \qquad (b)\quad \max_{[0,1]} f.$

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) := 3 + 3x + e^{4x}$ e $g(x) = x^2$. Se $h(x) = f^{-1}(g(x))$, si dica (4p.) quanto fa $h'(2)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - \sin(2n^2)}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{1/n}}{4n+1}$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)e^{2x^2} - \cos(x^2)}{\sin(x^2)\sin^2(x)}$$

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)
$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{4n}}{n} \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)\right)$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(3+x^3)\sqrt{|x^4 - 16|}}\,dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (eventualmente in forma implicita) (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):
$$y' = \frac{1}{y^2 - 4} \qquad y(-1) = -1.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(4x+3)\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' = \frac{2y}{x+5} - \frac{x-3}{x+6} \qquad x > -5.$$
    (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
    (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -5^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
    (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
    (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-5, +\infty[$ (2p.).

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 03 09 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila:

1. (a) 2 (b) -36

2. (a) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) 2

3. $\frac{4}{7}$

4. (a) 2 (b) 0

6. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC

7. α $-1 < \alpha < 4$

8. $y(x) =$ $\frac{y(x)^3}{3} - 4y(x) = \frac{14}{3} + x \qquad -9 \leq x \leq -\frac{10}{3}$

9. integ.= $\frac{1}{5} \ln(6)$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione degli esercizi 5 e 10.

1) $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{1+3x^2}\right)$

Dato che $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ si ha:

$$f(x) = \frac{1}{3}\ln(1+3x^2) = \frac{1}{3}\left\{(3x^2) - \frac{1}{2}(3x^2)^2 + o\left((3x^2)^2\right)\right\} =$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(IV)}(0)}{24}x^4 + o(x^4) \Rightarrow$$

$$f''(0) = \boxed{2} \qquad f^{(IV)}(0) = -\frac{24\cdot 3}{2} = \boxed{-36}$$

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 6x^5 - 5x^3 + 1$. Allora

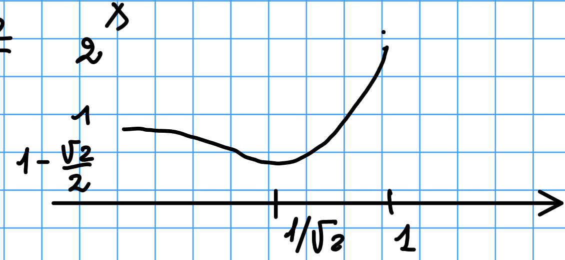
$f(0) = 1$, $f(1) = 6 - 5 + 1 = 2$

$f'(x) = 30x^4 - 15x^2 = 15x^2(2x^2-1) \Rightarrow f'(x) = 0$ per $x=0$ e $x = \sqrt{2}/2$

(oltre a $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ che non è in $[0,1]$). Dato che

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}} + 1 = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(3-5) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f ha grafico mostrato di lato



per cui $\min f = \boxed{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $\max f = \boxed{2}$

3) $f(x) = 3 + 3x + e^{4x}$ $\qquad g(x) = x^2$

$h(x) = f^{-1}(g(x))$.

Allore $f(0) = 3 + 1 = 4$ da cui $f^{-1}(4) = 0$; $f'(x) = 3 + 4e^{4x}$

$f'(0) = 3 + 4 = 7$. $\Rightarrow (f^{-1})'(4) = \frac{1}{7}$

Inoltre $g(2) = 4$ $\qquad g'(x) = 2x$ $\qquad g'(2) = 4$. DUNQUE

$$h'(2) = (f^{-1})'(g(2)) \cdot g'(2) = (f^{-1})'(4) \cdot 4 = \boxed{\frac{4}{7}}$$

4) (a) $\frac{2n^2 - \sin(n^2)}{n^2} = 2 - \frac{\sin(n^2)}{n^2} \to \boxed{2}$

(infatti $\sin(n^2)$ è limitato e $\frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \frac{\sin(n^2)}{n^2} \to 0$)

(b) $\frac{(1+n)^{\frac{1}{n}}}{4n+1} \to \boxed{0}$ $\qquad$ perchè $\frac{1}{4n+1} \to 0$ e

$(1+n)^{1/n} = \sqrt[n]{1+n} \to 1$

(6) (a) $\sqrt[n]{4n} \to 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt[n]{4n}}{n} \simeq \dfrac{1}{n}$ e quindi

$\sum_n \dfrac{\sqrt[n]{4n}}{n}$ DIVERGE. Questo implica che $\sum_n (-1)^n \dfrac{\sqrt[n]{4n}}{n}$ NON

CONVERGE ASSOLUTAMENTE. PERÒ $\dfrac{\sqrt[n]{4n}}{n}$ è decrescente $\Rightarrow$

$\sum_n (-1)^n \dfrac{\sqrt[n]{4n}}{n}$ è convergente $\boxed{C}$

(b) $a_n := 1 - \cos\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 + o\left(\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2\right)\right) =$

$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (perché $\dfrac{1+n^2}{1+n^3} \simeq \dfrac{1}{n}$ e $\cos(y) = 1 - \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)$
per $y \to 0$)

Dato che $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ è convergente $\Leftrightarrow$

$\sum_n (-1)^n a_n$ è $\boxed{AC}$

(7) $f(x) := \dfrac{x^\alpha}{(3+x^3)\sqrt{|x^4-16|}} = \dfrac{x^\alpha}{(3+x^3)\sqrt{x^2+4}\,\sqrt{|x+2|}\,\sqrt{|x-2|}}$

· La funzione f è integrabile vicino a $x=2$ (qualunque sia α)

dato che, se $x \to 2$, $f(x) \simeq \dfrac{\text{costante}}{|x-2|^{1/2}}$

· per $x \to 0^+$ si ha $f(x) \simeq \dfrac{x^\alpha}{12}$ che è integrabile per $\alpha > -1$

· per $x \to +\infty$ $f(x) \simeq \dfrac{x^\alpha}{x^3 \; x^2} = \dfrac{1}{5^{5-\alpha}}$ che è int. per $5-\alpha > 1$

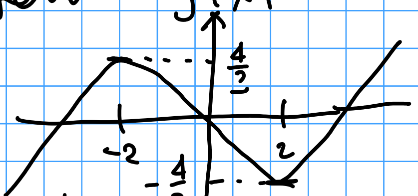
cioè $\alpha < 4$. IN DEFINITIVA f è int. su $]0,+\infty[\iff \boxed{-1 < \alpha < 4}$

8) $y' = \dfrac{1}{y^2-4}$ $\quad y(-1) = -1$ $\quad \displaystyle\int_{y_0}^{y(x)} (s^2-4)\,ds = x - x_0 \iff$

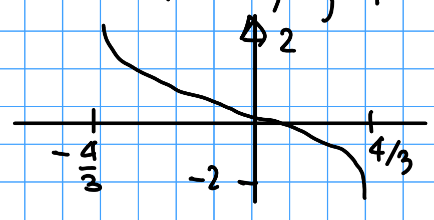
$\left[\dfrac{s^3}{3} - 4s\right]_{-1}^{y(x)} = x+1 \iff \dfrac{y(x)^3}{3} - 4y(x) = \dfrac{14}{3} + x$

La formula definisce y implicitamente, infatti $y(x) = F^{-1}\left(\dfrac{14}{3} + x\right)$

dove $F(y) = \dfrac{y^3}{3} - 4y$ che ha il grafico:



. Dato che dobbiamo invertire il "tratto di mezzo" (perché $y(-1) = -1 \in]-2,2[$), F^{-1} è definita tra $F(2)$ e $F(-2)$, cioè su $\left[-\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right]$:



Dobbiamo allora considerare $-\dfrac{4}{3} \leq x + \dfrac{14}{3} \leq \dfrac{4}{3}$

e cioè $\quad -9 \le x \le -\frac{10}{3}$

4) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4x+3}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = (*)$$

Prendo $\quad t=\sqrt{x^2+1}-x \iff t+x=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2+2tx+x^2=x^2+1$

$$\iff x=\frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow dx=\left(-\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt$$

e anche $\quad x+t=\frac{1-t^2}{2t}+t=\frac{1+t^2}{2t}$. DUNQUE

$$(*)=\int_1^0 \frac{1}{4\,\frac{1-t^2}{2t}+3}\;\frac{\cancel{2t}}{\cancel{1+t^2}}\,(-1)\,\frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2t^2}\;t}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{2-2t^2+3t} =$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)(2-t)} = \frac{1}{5}\int_0^1\left(\frac{1}{2-t}+\frac{2}{2t+1}\right)dt = \frac{1}{5}\left[\ln\frac{2t+1}{2-t}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln 3+\ln(2)\right) = \frac{1}{5}\ln 6$$

5) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)\,e^{2x^2}-\cos(x^2)}{\sin(x^2)\sin^2(x)}.$$ Si ha:

- $\cos(2x) = 1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}+o(16x^4) = 1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$

• $e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{4x^4}{2} + o(4x^2) = 1+2x^2+2x^4+o(x^4)$

$\Rightarrow \cos(2x)\, e^{2x^2} = \left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)\left(1+2x^2+2x^4+o(x^4)\right) =$

$1+\cancel{2x^2}+2x^4+o(x^4)-\cancel{2x^2}-4x^4+o(x^4)+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)+o\left(O(x^4)\right)$

$= 1 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$

• $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \Longrightarrow$

$\cos(2x)\, e^{2x^2} - \cos(x^2) = 1 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = -\frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$

• $\sin(x^2)\sin^2(x) = \left(x^2+o(x^2)\right)\left(x+o(x)\right)^2 = x^4\left(1+o(1)\right)\left(1+o(1)\right)^2 =$

$x^4\left(1+o(1)\right) = x^4 + o(x^4)$

IN DEFINITIVA

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)\, e^{2x^2} - \cos(x^2)}{\sin(x^2)\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \boxed{-\frac{5}{6}}$$

10) $y' = \frac{2y}{x+5} - \frac{x-3}{x+6}$ $y(0) = y_0$ per $x > -5$

(a) Applichiamo la formula risolutiva:

$$a(x) = \int_0^x \frac{2}{t+5}\, dz = 2\ln(t+5)\Big|_0^x = \ln\left(\frac{x+5}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{(x+5)^2}{25}\left\{ y_0 - \int_0^x \frac{25}{(t+5)^2}\,\frac{t-3}{t+6}\,dt \right\} =$$

$$(x+5)^2 \left\{ \frac{y_0}{25} - \int_0^x \frac{t-3}{(t+5)^2(t+6)}\,dt \right\}$$

$$\frac{t-3}{(t+5)^2(t+6)} = \frac{A}{(t+5)^2} + \frac{B}{t+5} + \frac{C}{t+6} = \frac{A(t+6) + B(t+5)(t+6) + C(t+5)^2}{(t+5)^2(t+6)}$$

$$= \frac{(B+C)t^2 + (A + 11B + 10C)t + 6A + 30B + 25C}{(t+5)^2(t+6)}$$

dunque deve essere

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + 11B + 10C = 1 \\ 6A + 30B + 25C = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -B \\ A + B = 1 \\ 6A + 5B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -B \\ B = 9 \\ A = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -8 \\ B = 9 \\ C = -9 \end{cases}$$

quindi

$$\int_0^x \frac{(t-3)}{(t+5)^2(t+6)}\,dt = \left[\frac{8}{t+5} + 9\ln\left(\frac{t+5}{t+6}\right) \right]_0^x \Rightarrow$$

$$y(x) = (x+5)^2 \left\{ c - \frac{8}{x+5} + 9 \ln\left(\frac{x+6}{x+5}\right)\right\} \quad \text{dove} \quad c = \frac{y_0}{25} + \frac{8}{5} + 9 \ln \frac{5}{6}$$

(b) $$\lim_{x \to -5} y(x) = \lim_{x \to -5} (x+5) \left\{ c\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{(x+5)} - 8 + \underset{0}{9(x+5)} \ln\left(\frac{x+6}{x+5}\right)\right\} = 0^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad c \geq 0 \quad (y_0 \geq 225 \ln(6/5) - 40 =: \bar{y}) \\ -\infty & \text{se} \quad c < 0 \quad (y_0 < y_0) \end{cases}$$

Il caso $c=0$ si fa usando Taylor:

$$y(x) = -8(x+5) + 9(x+5)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x+5}\right) =$$

$$-8(x+5) + 9(x+5)^2 \left\{ \frac{1}{x+5} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+5)^2} + o\left(\frac{1}{(x+5)^2}\right)\right\} =$$

$$(x+5) - \frac{9}{2} + o(1) \longrightarrow +\infty$$

(c) Per studiare la monotonia della $y(x)$ consideriamo (per $x > -5$)

$$F(x,y) := \frac{2y}{x+5} - \frac{x-3}{x+6}. \quad \text{Si ha} \quad F(x,y) > 0 \iff y = \frac{(x+5)(x-3)}{2(x+6)} =: g(x)$$

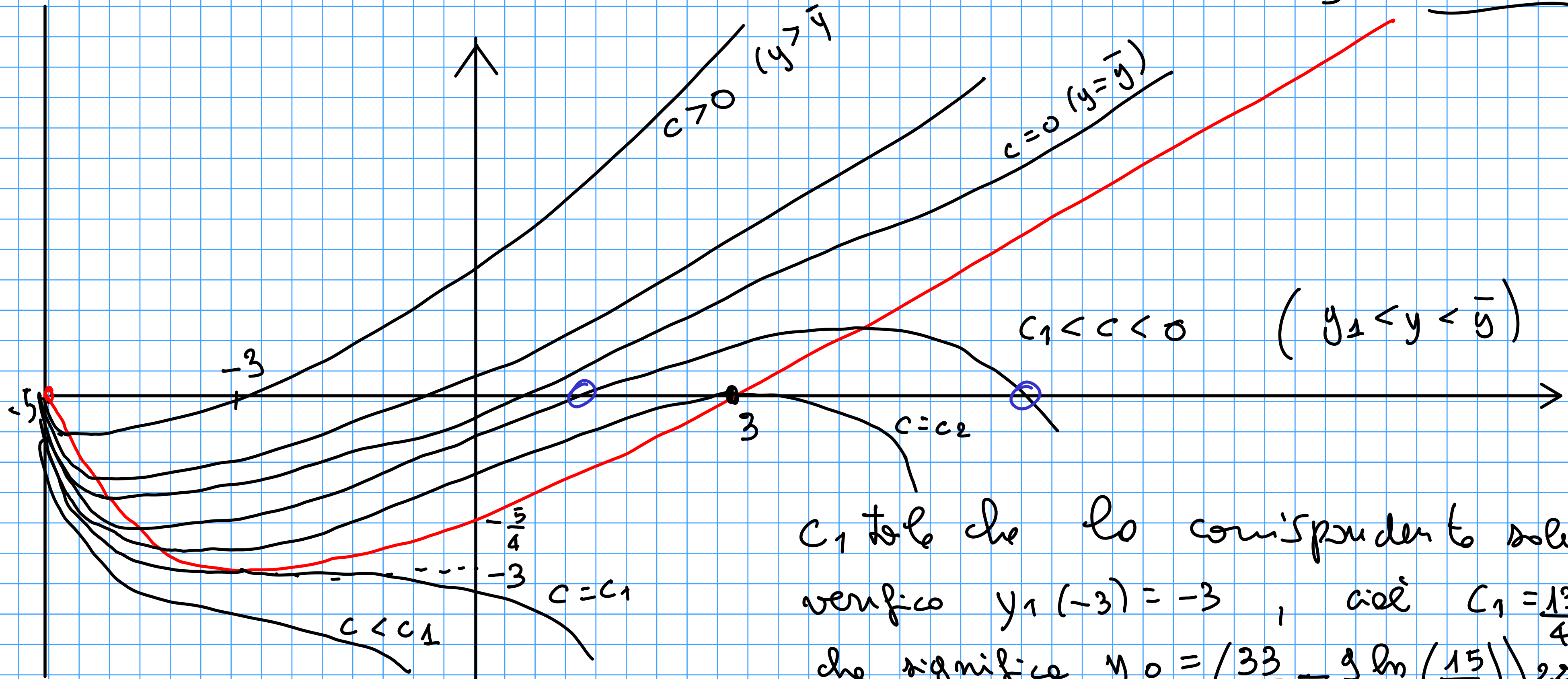
Studiamo $g(x)$ su $[-5, +\infty[$. Si ha $g(-5) = 0$,

$g(3)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Derivando

$$\frac{-3\cdot 6}{2\cdot 3} = -3$$

$$g'(x) = \frac{(x-3+x+5)-(x+5)(x-3)}{2(x+6)^2} = \frac{x^2+12x+27}{2(x+6)^2}$$

$$g'(x)=0 \iff x = -6 \pm \sqrt{36-27} = -6\pm 3 = \begin{cases} -9 \\ -3 \end{cases} ; \ \underline{g(-3) = -3} \implies$$



C_1 tale che la corrispondente soluzione y_1 verifica $y_1(-3)=-3$, cioè $C_1 = \frac{13}{4} - \ln\frac{3}{2}$ che significa $y_0 = \left(\frac{33}{20} - 9\ln\left(\frac{15}{12}\right)\right)25 =: y_1$

(d) Dai grafici si vede che $y(x)=0$ ha due radici $\iff$ $y_2 < y_0 < \bar{y}$ dove y_2 corrisponde alla condizione $y(3)=0$, cioè $y_2 = -15 + 225\ln\left(\frac{16}{15}\right)$