Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 luglio 2012. FILA A

1. Sia $f(x) := \ln(1-8x^3)$. Si calcolino (2+2p.): $(a) \quad f^{(3)}(0), \qquad (b) \quad f^{(6)}(0).$

2. Sia $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 4x^3 - x$ Si dica quanto fanno (2p. ciascuno):
   $(a) \quad \min f, \qquad (b) \quad \max f.$

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) := 1 + 3x + 5\ln(x)$ e $g(x) = x^2$. Se $h(x) = f^{-1}(g(x))$, si dica (4p.) quanto fa $h'(2)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n - \sin(3n)}{n^3}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5n} - n}{4n+1}$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x}\,\sqrt[3]{1+3x} - 5\cos(x) + 4}{x - \tan(x)}$$

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{4+5n^2}{1-n^2+n^4}\right) \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{5}}{n}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{|x-1|^{\alpha}}{(5+x^4)\sqrt{|x^4-1|}}\,dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (eventualmente in forma implicita) (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):
$$y' = \frac{1}{4-y^2} \qquad y(-1) = -1.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\tan^2(3x) + 4\tan(3x) + 3}\,dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' = \frac{2y}{x+4} - \frac{x-4}{x+5} \qquad x > -4.$$
   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -4^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-4, +\infty[$ (2p.).

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 luglio 2012. FILA B

1. Sia $f(x) := \ln(1-27x^3)$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Sia $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 9x^3 - x$ Si dica quanto fanno (2p. ciascuno): (a) $\min f$, (b) $\max f$.

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) := 1+3x+4\ln(x)$ e $g(x) = x^2$. Se $h(x) = f^{-1}(g(x))$, si dica (4p.) quanto fa $h'(2)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n - \sin(4n)}{n^3}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4n} - n}{5n+1}$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x}\,\sqrt[3]{1+3x} - 5\cos(x) + 4}{x - \tan(x)}$$

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{5+4n^2}{1-n^2+n^4}\right) \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{4}}{n}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{|x-1|^{\alpha}}{(4+x^5)\sqrt{|x^4-1|}}\,dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (eventualmente in forma implicita) (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):

$$y' = \frac{1}{4-y^2} \qquad y(-2) = -1.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\pi/8} \frac{1}{\tan^2(4x) + 4\tan(4x) + 3}\,dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x+4} - \frac{x-4}{x+5} \qquad x > -4.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -4^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-4, +\infty[$ (2p.).

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 luglio 2012. FILA C

1. Sia $f(x) := \ln(1+8x^3)$. Si calcolino (2+2p.): (a) $\quad f^{(3)}(0)$, $\qquad (b)$ $\quad f^{(6)}(0)$.

2. Sia $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := x - 4x^3$ Si dica quanto fanno (2p. ciascuno):
   (a) $\quad \min f$, $\qquad (b)$ $\quad \max f$.

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) := 1+3x+3\ln(x)$ e $g(x) = x^2$. Se $h(x) = f^{-1}(g(x))$, si dica (4p.) quanto fa $h'(2)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n - \sin(5n)}{n^3}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3n} - n}{2n+1}$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x}\,\sqrt[3]{1+3x} - 5\cos(x) + 4}{x - \tan(x)}$$

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{2+3n^2}{1-n^2+n^4}\right) \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{3}}{n}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{|x-1|^{\alpha}}{(3+x^2)\sqrt{|x^4-1|}}\,dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (eventualmente in forma implicita) (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):
$$y' = \frac{1}{4-y^2} \qquad y(1) = -1.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_0^{\pi/10} \frac{1}{\tan^2(5x) + 4\tan(5x) + 3}\,dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:
$$y' = \frac{2y}{x+4} - \frac{x-4}{x+5} \qquad x > -4.$$
   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -4^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-4, +\infty[$ (2p.).

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 luglio 2012. FILA D

1. Sia $f(x) := \ln(1 + 27x^3)$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Sia $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := x - 9x^3$ Si dica quanto fanno (2p. ciascuno): (a) $\min f$, (b) $\max f$.

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) := 1 + 3x + 2\ln(x)$ e $g(x) = x^2$. Se $h(x) = f^{-1}(g(x))$, si dica (4p.) quanto fa $h'(2)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n - \sin(6n)}{n^3}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n} - n}{3n + 1}$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x}\,\sqrt[3]{1+3x} - 5\cos(x) + 4}{x - \tan(x)}$$

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{3 + 2n^2}{1 - n^2 + n^4}\right) \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{2}}{n}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{|x-1|^{\alpha}}{(2 + x^3)\sqrt{|x^4 - 1|}}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (eventualmente in forma implicita) (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):

$$y' = \frac{1}{4 - y^2} \qquad y(2) = -1.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\pi/12} \frac{1}{\tan^2(6x) + 4\tan(6x) + 3}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x+4} - \frac{x-4}{x+5} \qquad x > -4.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -4^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-4, +\infty[$ (2p.).

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 13 07 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

1. (a) -48 (b) -23040

2. (a) -30 (b) 3

3. $1/2$

4. (a) 0 (b) $-1/4$

6. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC

7. α $-\frac{1}{2} < \alpha < 5$

8. $y(x) =$ $4y(x) - \frac{y(x)^3}{3} = -\frac{8}{3} + x \qquad -\frac{8}{3} < x < 8$

9. integ.= $\frac{\ln(3) + \pi}{60}$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione degli esercizi 5 e 10.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 13 07 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

1. (a) -162 (b) -262440

2. (a) -70 (b) 8

3. $4/7$

4. (a) 0 (b) $-1/5$

6. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC

7. α $-\frac{1}{2} < \alpha < 6$

8. $y(x) =$ $4y(x) - \frac{y(x)^3}{3} = \frac{-5}{3} + x \quad -\frac{11}{3} < x < 7$

9. integ.= $\frac{\ln(3)+\pi}{80}$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione degli esercizi 5 e 10.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 13 07 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

1. (a) 48 (b) −23040

2. (a) −3 (b) 30

3. 2/3

4. (a) 0 (b) $-1/2$

6. (a) $\cancel{\text{AC}}$ C NC (b) AC $\cancel{\text{C}}$ NC

7. α $-\frac{1}{2} < \alpha < 3$

8. $y(x) =$ $4y(x) - \frac{y(x)^3}{3} = -\frac{14}{3} + x \qquad -\frac{2}{3} < x < 10$

9. integ.= $\frac{\ln(3) + \pi}{100}$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione degli esercizi 5 e 10.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 13 07 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

1. (a) 162 (b) −262 440

2. (a) −8 (b) 70

3. 4/5

4. (a) 0 (b) −1/3

6. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC

7. α $-1/2 < \alpha < 4$

8. $y(x) =$ $4y(x) - \frac{y(x)^3}{3} = \frac{-17}{3} + x \qquad \frac{1}{3} < x < 11$

9. integ.= $\frac{\ln(3) + \pi}{120}$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione degli esercizi 5 e 10.

1) $f(x) = \ln(1 + A x^3)$. Dato che $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

si ha $f(x) = A x^3 - A^2 \frac{x^6}{2} + o(x^6)$ e quindi

$\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = A \iff f^{(3)}(0) = \boxed{3!\,A}$ e

$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{A^2}{2} \iff f^{(6)}(0) = \boxed{-\frac{6!\,A^2}{2}}$.

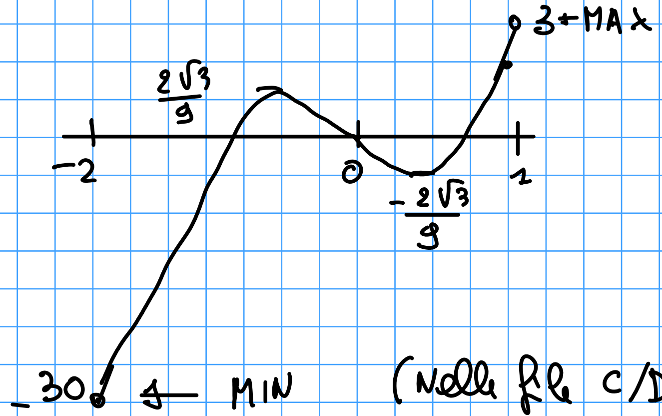
2) $f(x) = 4x^3 - x$ (è il caso A — gli altri sono simili)

per $x \in [-2, 1]$. Allora $f(-2) = -32 + 2 = -30$

$f(1) = 3$, $f'(x) = 12x^2 - 1$ da cui $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1/2\sqrt{3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$

(entrambi tra -2 e 1). $f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\pm\sqrt{3}}{6}\left(\frac{4}{12} - 1\right) = \mp \frac{\sqrt{3}}{6}\,\frac{2}{3} = \mp \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Dunque il grafico di f è fatto come in figura →



Dato che $\frac{2\sqrt{3}}{9} < 3$ è chiaro che il max e il min sono assunti agli estremi

$$\boxed{\begin{aligned} \max f &= f(1) \\ \min f &= f(-2) \end{aligned}}$$

(Nelle file C/D le cose si scambiano)

(3) $f(x) := 1 + 3x + A\ln(x)$; $g(x) := x^2$; $h(x) := f^{-1}(g(x))$.

Allora $f(1) = 4 \leftrightarrow f^{-1}(4) = 1$; $f'(x) = 3 + \frac{A}{x}$ e

$g'(x) = 2x \rightarrow g(2) = 4$, $g'(2) = 4$. Usando i teoremi sulle derivate:

$$h'(2) = \left(f^{-1}\right)'(g(2)) \cdot g'(2) = \left(f^{-1}(4)\right) \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{f'(1)} = \boxed{\frac{4}{3+A}}$$

(4)

$$\frac{An - \sin(An)}{n^3} = \frac{n}{n^3}\Big(A - \underbrace{\frac{\sin(An)}{n}}_{\to 0}\Big) = \frac{1}{n^2}\left(A + o(1)\right) \rightarrow \boxed{0}$$

(perché è limitato x infinitesimo)

$$\frac{\sqrt[n]{5n} - n}{An + 1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \frac{\frac{\sqrt[n]{5n}}{n} - 1}{A + 1/n} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{A}}$$

(perché $\sqrt[n]{5n} \rightarrow 1$)

5) Usiamo Taylor. Ricordiamo prima di tutto che

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + o(x^3) \qquad \text{DA CUI}$$

$$\sqrt{1-2x} = 1 - \frac{2x}{2} - \frac{4x^2}{8} - \frac{8x^3}{16} + o(x^3) = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\sqrt[3]{1+3x} = 1 + \frac{3x}{3} - \frac{9x^2}{9} + \frac{5 \cdot 27 x^3}{81} = 1 + x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-2x}\,\sqrt[3]{1+3x} = \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$1 \cancel{+x} - x^2 + \frac{5}{3}x^3 \cancel{-x} - x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) =$$

$$1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3). \qquad \text{DUNQUE}$$

$$\sqrt{1-2x}\,\sqrt[3]{1+3x} - 5\cos(x) + 4 = 1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3) - 5 + \frac{5}{2}x^2 + o(x^3) + 4$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + o(x^3).$$

INFINE $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x}\,\sqrt[3]{1+3x} - 5\cos(x) + 4}{x - \tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \boxed{-5}$$

6)

- $a_n := \dfrac{A + Bn^2}{1 - n^2 + n^4}$. $a_n \geq 0$ e $a_n \simeq \dfrac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$

$\sin(a_n) \geq 0$ (per n grande) e $\sin(a_n) \simeq \dfrac{1}{n^2}$ e quindi $\left(\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty\right)$

$\sum_n \sin(a_n)$ converge. Se ne ricavo che $\sum_n (-1)^n \sin(a_n)$ è $\boxed{A.C.}$

- $a_n := \dfrac{\sqrt[n]{A}}{n}$. È chiaro che $\sqrt[n]{A} \to 1$ ed è decrescente.

Allora a_n tende a zero ed è decrescente. $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$

converge per Leibniz. Pero'altro $\sum_n (-1)^n a_n$ non conv. ass. dato che

$a_n \simeq \dfrac{1}{n}$ e $\sum_n \dfrac{1}{n} = +\infty$ $\boxed{C}$

(7) $$\int_0^{+\infty} \frac{|x-1|^\alpha}{(A+x^k)\sqrt{x^4-1}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{|x-1|^\alpha}{(A+x^k)\sqrt{(x^2+1)(x+1)}\,|x-1|^{1/2}}\, dx =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(A+x^k)\sqrt{(x^2+1)(x+1)}\,|x-1|^{\frac{1}{2}-\alpha}} = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

– VICINO A 1: $f(x) \simeq \dfrac{\text{costante}}{|x-1|^{1/2-\alpha}}$ che è integrabile $\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \alpha < 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > -\frac{1}{2}}$

- ALL' INFINITO $f(x) \simeq \frac{x^{\alpha}}{x^{k}\sqrt{x^{4}}} = \frac{1}{x^{k+2-\alpha}}$ che è integrabile per $k+2-\alpha>1$

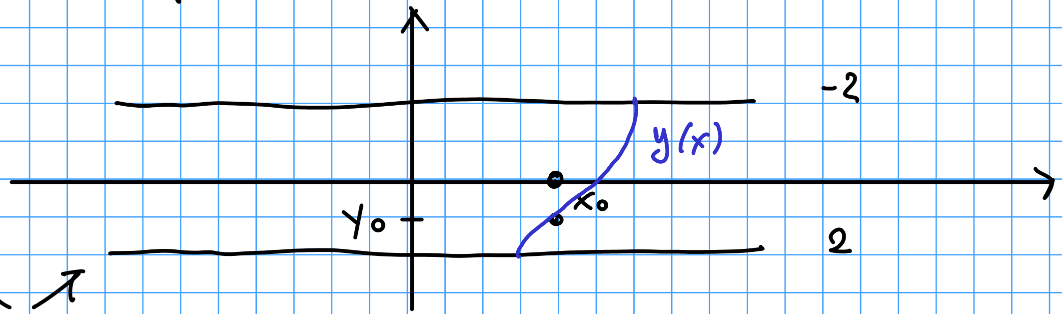
$\iff \alpha < k+1$. IN DEFINITIVA $\boxed{-\frac{1}{2} < \alpha < k+1}$

(8) $y' = \frac{1}{4-y^2}$ $\quad y(x_0) = -1$ $\quad$ ($x_0 = 1, 2, -1, -2$ a seconda della fila)

Notiamo che $\frac{1}{4-y^2}$ è definita per $y \neq \pm 2$ e che $y_0 = -1$ è tra -2 e 2.

Dato che $\frac{1}{4-y^2} > 0$ in $]-2,2[$

mi aspetto una curva così



Risolvo l'equazione con la tecnica usuale:

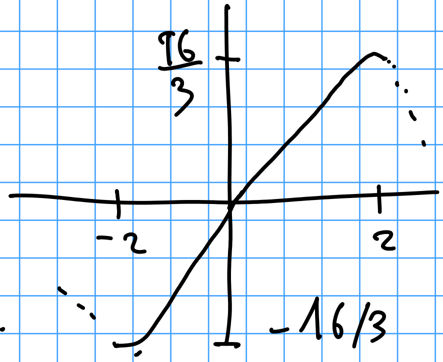
$$\int_{-1}^{y(x)} (4-s^2)\,ds = \int_{x_0}^{x} 1\,dt \iff \left[4s - \frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{y(x)} = x - x_0 \iff$$

$$\boxed{4y(x) - \frac{y^3(x)}{3} = -\frac{11}{3} + x - x_0}$$

. Tale $y(x)$ è definita implicitamente dalla relazione sopra, cioè da $F(y(x)) = -\frac{11}{3} + x - x_0$

dove $F(y) = 4y - y^3/3$. Facendo il grafico di F (notiamo

che $F'(y) = 4 - y^2$) si vede
che F è fatto come nel disegno $\rightarrow$



e quindi F^{-1} è definito su $\left[-\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right]$.

Ne segue che il dominio di $y(x)$ è dato da

$$-\frac{16}{3} < -\frac{11}{3} + x - x_0 < \frac{16}{3} \iff$$

$$\boxed{x_0 - \frac{5}{3} < x < x_0 + 9}$$

(9)
$$\int_0^{\pi/2a} \frac{dx}{\tan^2(ax) + 4\tan(ax) + 3} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\tan^2(y) + 4\tan(y) + 3} =$$

$$\left(y = ax \quad x = \frac{y}{a} \quad dx = \frac{dy}{a} \right)$$

$$\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 4t + 3)(t^2+1)}$$

$$\left(t = \tan(y) \quad y = \arctan(t) \quad dy = \frac{dt}{1+t^2} \right)$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+3)(t^2+1)} = (*)$$

Riduciamo in fratti semplici :

$$\frac{1}{(t+1)(t+3)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+3} + \frac{Ct+D}{t^2+1} =$$

$$\frac{A\,(t^3+t+3t^2+3) + B(t^3+t+t^2+1) + C\,(t^3+4t^2+3t) + D(t^2+4t+3)}{(t^2+4t+3)(t^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = 0 \\ 3A+B+4C+D = 0 \\ A+B+3C+4D = 0 \\ 3A+B+3D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+B+4C+D=0 \\ 2C+4D=0 & (\mathrm{III}-\mathrm{I}) \\ -4C+2D=1 & (\mathrm{IV}-\mathrm{II}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} D=\frac{1}{10}, \quad C=-\frac{1}{5} \\ A+B=1/5 \\ 3A+B=7/10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \quad B=-\frac{1}{20} \\ C=-\frac{1}{5} \quad D=\frac{1}{10} \end{cases}$$

DA CUI

$$(*) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\,\frac{1}{t+1} - \frac{1}{20}\,\frac{1}{t+3} + \frac{1}{10}\,\frac{-2t+1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$\frac{1}{a}\left[\ln \frac{(t+1)^{1/4}}{(t^2+1)^{1/10}(t+3)^{1/20}} + \frac{1}{10}\arctan t\right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\ln(3)+\pi}{20\,a}}$$

(10) $y' = \dfrac{2y}{x+4} - \dfrac{x-4}{x+5} \qquad x > -4$

Dato che $\int_0^x \frac{2}{t+4}\,dt = 2\ln\left(\frac{x+4}{4}\right) \Rightarrow$

$$y(x) = \left(\frac{x+4}{4}\right)^2 \left\{ y(0) - \int_0^x \left(\frac{4}{t+4}\right)^2 \frac{t-4}{t+5}\,dt \right\} =$$

$$(x+4)^2 \left\{ -c_1 - \int_0^x \frac{t-4}{(t+5)(t+4)^2}\,dx \right\}.$$ Riduco in fratti semplici:

$$\frac{t-4}{(t+5)(t+4)^2} = \frac{A}{t+5} + \frac{B}{t+4} + \frac{C}{(t+4)^2} = \frac{A(t^2+8t+16) + B(t^2+9t+20) + C(t+5)}{(t+5)(t+4)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \\ 8A+9B+C = 1 \\ 16A+20B+5C = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ -A+C = 1 \\ -4A+5C = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ C = 1+A \\ A = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -9 \\ B = 9 \\ C = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{t-4}{(t+5)(t+4)^2} = -\frac{9}{t+5} + \frac{9}{t+4} - \frac{8}{(t+4)^2}. \Rightarrow$$

$$y(x) = (x+4)^2 \left\{ c - \frac{8}{x+4} + 9\ln\left(\frac{x+5}{x+4}\right) \right\} \quad ||$$

dove $c = \frac{y_0}{16} + 2 - 9\ln\frac{5}{4}$

$$\lim_{x\to -4} y(x) = \lim_{x\to -4} (x+4)\left\{-c(x+4) - 8 + 9(x+4)\ln\left(\frac{x+5}{x+4}\right)\right\} = \boxed{0^-}$$

$$\lim_{x\to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c>0 \Rightarrow \text{cioè } y_0 > 16\left(9\ln\frac{5}{4} - 2\right) =: \overline{y_0} \quad (<0) \\ +\infty & \text{se } c=0 \Rightarrow y_0 = \overline{y_0} \\ -\infty & \text{se } c<0 \Rightarrow y_0 < \overline{y_0} \end{cases}$$

Il caso $c=0$ si deve fare a parte:

$$\lim_{x\to +\infty} y(x) = \lim_{x\to +\infty} 9(x+4)^2 \ln\left(\frac{x+5}{x+4}\right) - 8(x+4) =$$

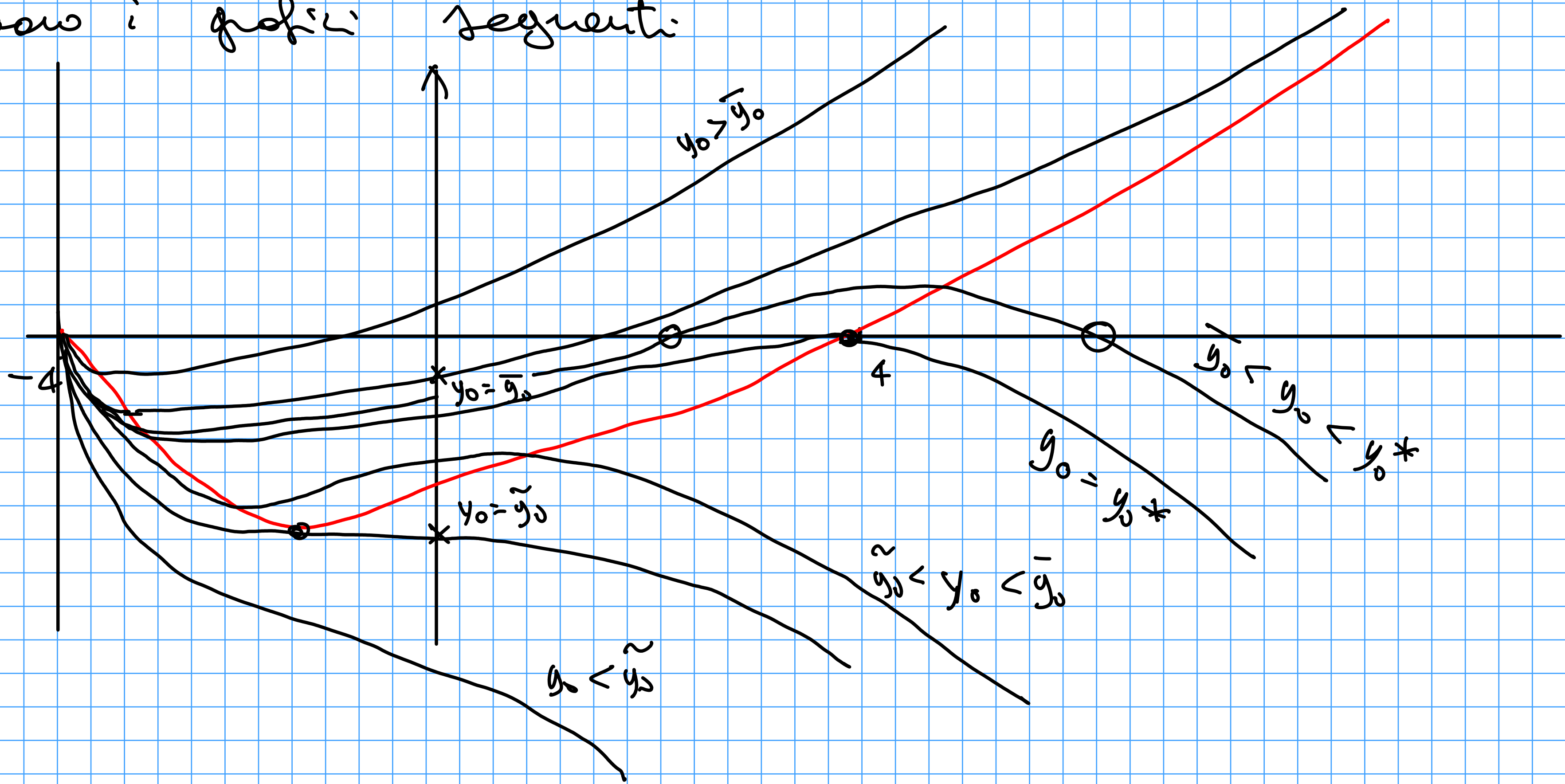
$$\lim_{x\to +\infty} 9(x+4)^2 \ln\left(1+\frac{1}{x+4}\right) - 8(x+4) =$$

$$\lim_{x\to +\infty} 9(x+4)^2\left[\frac{1}{x+4} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+4)^2} + o\left(\frac{1}{(x+4)^2}\right)\right] - 8(x+4) = \lim_{x\to +\infty}\left[(x+4) - \frac{9}{2} + o(1)\right] = +\infty$$

PER LA MONOTONIA PONIAMO $F(x,y) := \dfrac{2y}{x+4} - \dfrac{x-4}{x+5}$ e studiamo il segno di $F(x,y)$. Si ha $F(x,y) > 0 \iff y > \dfrac{x^2-4}{2(x+5)} =: g(x)$ (per $x > -4$). Studiamo $g(x)$ su $[-4, +\infty[$ $\Rightarrow$

$g(-4) = g(4) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $g'(x) = \dfrac{4+10x+x^2}{2(x+5)^2}$

che si annulla in $x = -5+\sqrt{21}$. Tracciando il grafico di g (curva rosso) e usando il fatto che $F(x,y)>0 \iff y > g(x)$ si trovano i grafici seguenti:



Per rispondere all'ultimo punto trovo il valore y_0^* per cui la soluzione passa per $(4,0)$. Tale valore è dato da

$$0 = (4+4)^2\left(c^* - \frac{8}{4+4} + 9\ln\left(\frac{4+5}{4+4}\right)\right) \iff c^* = 1 - 9\ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$\iff y^* = 8 - 16\cdot 9\ln\frac{9}{10}$$

Trovato tale y_0^* si vede dal grafico che $y(x)=0$ ha due soluzioni se e solo se $\boxed{y_0^* < y_0 < \bar{y}_0}$