Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 23 giugno 2012. FILA A

1. Sia $f(x) := \sqrt{1-2x^3}$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Sia dato l'insieme: $A := \left\{ y \in \mathbb{R} \,:\, y + \dfrac{1}{4+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}$.

   Si dica quanto fanno (2p. ciascuno): (a) $\inf A$, (b) $\sup A$.

3. Data la funzione $f(x) := 1 + 3x + 4\ln(x)$ si dica (4p.) quanto fa $(f^{-1})'(4)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(3n)}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5}-1)$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1-3x} - \cos(\sqrt{5}x)}{x - \sin(x)}$$

SECONDA PARTE

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{3}-1\right) \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n^2)}{n^2}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(4+x^3)\sqrt{|x^4-1|}}\,dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):

$$y' = \sqrt{1-y^2} \qquad y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\tan^2(3x) + 3\tan(3x) + 2}\,dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x+1} - \frac{x-1}{4x+5} \qquad x > -1.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-1, +\infty[$ (2p.).

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 23 giugno 2012. FILA B

1. Sia $f(x) := \sqrt{1-4x^3}$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f^{(3)}(0)$, (b) $f^{(6)}(0)$.

2. Sia dato l'insieme: $A := \left\{ y \in \mathbb{R} \,:\, y + \dfrac{1}{9+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}$.

   Si dica quanto fanno (2p. ciascuno): (a) $\inf A$, (b) $\sup A$.

3. Data la funzione $f(x) := 1 + 4x + 5\ln(x)$ si dica (4p.) quanto fa $(f^{-1})'(5)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(4n)}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{4}-1)$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1-3x} - \cos(\sqrt{5}x)}{x-\sin(x)}$$

SECONDA PARTE

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n^2)}{n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{4}-1\right)$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(5+x^4)\sqrt{|x^4-1|}}\,dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):

$$y' = \sqrt{1-y^2} \qquad y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\pi/8} \frac{1}{\tan^2(4x) + 3\tan(4x) + 2}\,dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x+1} - \frac{x-1}{4x+5} \qquad x > -1.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-1, +\infty[$ (2p.).

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 23 giugno 2012. FILA C

1. Sia $f(x) := \sqrt{1+2x^3}$. Si calcolino (2+2p.): $(a)\quad f^{(3)}(0)$, $\qquad (b)\quad f^{(6)}(0)$.

2. Sia dato l'insieme: $A := \left\{ y \in \mathbb{R} \, : \, y + \dfrac{1}{16+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}$.

   Si dica quanto fanno (2p. ciascuno): $(a)\quad \inf A$, $\qquad (b)\quad \sup A$.

3. Data la funzione $f(x) := 1 + 5x + 6\ln(x)$ si dica (4p.) quanto fa $(f^{-1})'(6)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3} - 1), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(5n)}{n^2}$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1-3x} - \cos(\sqrt{5}x)}{x - \sin(x)}$$

SECONDA PARTE

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n^2)}{n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{5} - 1\right)$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(6+x^5)\sqrt{|x^4-1|}}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):

$$y' = \sqrt{1-y^2} \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\pi/10} \frac{1}{\tan^2(5x) + 3\tan(5x) + 2}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x+1} - \frac{x-1}{4x+5} \qquad x > -1.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-1, +\infty[$ (2p.).

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 23 giugno 2012. FILA D

1. Sia $f(x) := \sqrt{1+4x^3}$. Si calcolino (2+2p.): $(a)\quad f^{(3)}(0), \qquad (b)\quad f^{(6)}(0)$.

2. Sia dato l'insieme: $A := \left\{ y \in \mathbb{R} \, : \, y + \dfrac{1}{25+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}$.

   Si dica quanto fanno (2p. ciascuno): $(a)\quad \inf A, \qquad (b)\quad \sup A$.

3. Data la funzione $f(x) := 1 + 2x + 3\ln(x)$ si dica (4p.) quanto fa $(f^{-1})'(3)$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (5p. ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(6n)}{n^2}$$

5. Si calcoli il seguente limite (se esiste, 13p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1-3x} - \cos(\sqrt{5}x)}{x - \sin(x)}$$

SECONDA PARTE

6. Si studi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$ = assolutamente convergente, $\boxed{\text{C}}$ = convergente ma non assolutamente convergente , $\boxed{\text{NC}}$ = non convergente) (2p. ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n^2)}{n^2}$$

7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(3+x^2)\sqrt{|x^4-1|}}\, dx$$

8. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (a variabili separabili) indicando anche l'intervallo delle x per le quali è definita la soluzione (5p.):

$$y' = \sqrt{1-y^2} \qquad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\pi/12} \frac{1}{\tan^2(6x) + 3\tan(6x) + 2}\, dx$$

10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x+1} - \frac{x-1}{4x+5} \qquad x > -1.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (4p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-1, +\infty[$ (2p.).

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA | | | | | 2012

PRIMA PARTE

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

1. (a) -6 (b) -360

2. (a) 0 (b) $+\infty$

3. $1/7$

4. (a) 0 (b) $\ln(5)$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione dell'ultimo esercizio.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA | | | | | 2012

PRIMA PARTE

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

1. (a) -12 (b) -1440

2. (a) 0 (b) $+\infty$

3. $1/9$

4. (a) 0 (b) $\ln(4)$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione dell'ultimo esercizio.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA ___ ___ 2012

PRIMA PARTE

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

1. (a)	6	(b)	-360
2. (a)	0	(b)	$+\infty$
3.	$1/11$		
4. (a)	$\ln(3)$	(b)	0

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione dell'ultimo esercizio.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA | | | | 2012

PRIMA PARTE

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

1. (a) 12 (b) -1440

2. (a) 0 (b) $+\infty$

3. $1/5$

4. (a) $\ln(2)$ (b) 0

LE FACCIATE BIANCHE SONO RISERVATE ALLA RISOLUZIONE DELL'ULTIMO ESERCIZIO.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA | | | | | 2012

SECONDA PARTE

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

1. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC

2. α $-1 < \alpha < 1$

3. $y(x) =$ $y(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > -\pi/4 \\ \sin(x + 3\pi/4) & \text{se } -5\pi/4 \leq x \leq -\pi/4 \\ -1 & \text{se } x < -5\pi/4 \end{cases}$

4. integ.= $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{\ln(2)}{5}\right)$

LE FACCIATE BIANCHE SONO RISERVATE ALLA RISOLUZIONE DELL'ULTIMO ESERCIZIO.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA | | | | | 2012

SECONDA PARTE

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

1. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC

2. α $-1 < \alpha < 5$

3. $y(x) =$ $y(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > -5\pi/4 \\ \sin(x + 7\pi/4) & \text{se } -9\pi/4 \leq x \leq -5\pi/4 \\ -1 & \text{se } x < -9\pi/4 \end{cases}$

4. integ.= $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{\ln(2)}{5}\right)$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione dell'ultimo esercizio.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA | | | | | 2012

SECONDA PARTE

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

1. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC

2. α $-1 < \alpha < 6$

3. $y(x) =$ $y(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 3\pi/4 \\ \sin(x - \pi/4) & \text{se } -\pi/4 \leq x \leq 3\pi/4 \\ -1 & \text{se } x < -\pi/4 \end{cases}$

4. integ.= $\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{\ln(2)}{5}\right)$

LE FACCIATE BIANCHE SONO RISERVATE ALLA RISOLUZIONE DELL'ULTIMO ESERCIZIO.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA | | | | | 2012

SECONDA PARTE

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

1. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC

2. α $-1 < \alpha < 3$

3. $y(x) =$ $y(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 7\pi/4 \\ \sin(x - 5\pi/4) & \text{se} \quad 3\pi/4 \le x \le 7\pi/4 \\ -1 & \text{se} \quad x < 3\pi/4 \end{cases}$

4. integ.= $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{\ln(2)}{5}\right)$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione dell'ultimo esercizio.

1) Se $f(x)=\sqrt{1+ax^3}$ si ha (dato che $\sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2)$)

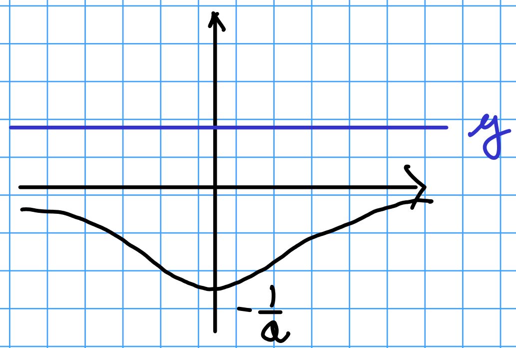
$$f(x)=1+\frac{1}{2}(ax^3)-\frac{1}{8}(ax^3)^2+o\left(\left(ax^3\right)^3\right)=$$

$$1+\frac{a}{2}x^3-\frac{a^2}{8}x^6+o(x^6).$$ Ne segue

$$f'''(0)=3!\,\frac{a}{2}=\boxed{3a} \qquad f^{VI}(0)=6!\,\frac{a^2}{8}=\boxed{90\,a^2}$$

2) Si può scrivere $A=\{y\in\mathbb{R} : y>f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\}$ dove

$f(x)=-\frac{1}{a+x^2}$. La f ha il grafico seguente



per cui le y che sono sopra il grafico di f sono date da $A=]0,+\infty[$. Dunque

$\boxed{\inf A=0}$ / $\boxed{\sup A=+\infty}$

3) Se $f(x)=1+ax+b\ln(x)$ è chiaro che f è strett. crescente su $]0,+\infty[$ $\Rightarrow$ esiste $f^{-1}:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$. Dato che

$f(1)=a+1$, $f'(x)=a+\frac{b}{x} \Rightarrow f'(1)=a+b$, si ha

$$(f^{-1})'(a+1)=\frac{1}{f'(1)}=\boxed{\frac{1}{a+b}}$$

4) (a) $n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)=n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(A)}-1\right)=n\left(\cancel{1}+\frac{1}{n}\ln(A)+o\left(\frac{1}{n}\right)-\cancel{1}\right)=$

$\ln(A)+o(1)\to\boxed{\ln(A)}$

(b) $\left|\frac{1-\cos(Bn)}{n^2}\right|\le\frac{2}{n}\to 0 \Rightarrow \frac{1-\cos(Bn)}{n^2}\to\boxed{0}$

(5) Ricordiamo la formula $(1+y)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}y^k+o(y^k)$

dove $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

Dunque $\sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+\frac{y^3}{16}+o(y^3)$

$\sqrt[3]{1+y}=1+\frac{y}{3}-\frac{y^2}{9}+\frac{5}{81}y^3+o(y^3)$

da cui $\sqrt{1+2x}=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$

$\sqrt[3]{1-3x}=1-x-x^2-\frac{5}{3}x^3+o(x^3)$ e quindi

$\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1-3x}-\cos(\sqrt{5}x)=\left(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)\left(1-x-x^2-\frac{5}{3}x^3+o(x^3)\right)$

$$-1+\frac{5}{2}x^2+o(x^3) = \cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{x^2}-\frac{5}{3}x^3+o(x^3)+\cancel{x}-\cancel{x^2}-x^3+o(x^3)-\cancel{\frac{x^2}{2}}+$$
$$+\frac{x^3}{2}+o(x^3)+\frac{x^3}{2}+o(x^3)-\cancel{1}+\cancel{\frac{5}{2}x^2} = -\frac{5}{3}x^3+o(x^3)$$

Infine $x-\sin(x)=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1-3x}-\cos(\sqrt{5}x)}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{3}+o(1)}{\frac{1}{6}+o(1)} = \boxed{-10}$$

6)

- Se $a_n=\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$ allora $a_n=e^{\frac{1}{n}\ln(A)}-1=1+\frac{1}{n}\ln(A)+o\left(\frac{1}{n}\right)-1 \simeq \frac{\ln(A)}{n}$

Dunque $\sum_n a_n$ diverge (la serie $\sum_n(-1)^n a_n$ non conv. ass.)

Però è facile vedere che $a_{n+1}\leq a_n \Rightarrow \sum_n(-1)^n a_n$ converge

per Leibniz $\Rightarrow$ $\boxed{C}$

- Se $a_n=\frac{\ln(1+n^2)}{n^2}$ si ha $a_n=\frac{\ln(n^2)+\ln(1+1/n^2)}{n^2} \simeq \frac{2\ln(n)}{n^2}$

Dato che $2>1$ la serie $\sum_n \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

da cui $\sum_n(-1)^n a_n$ converge assolutamente $\boxed{AC}$

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^\alpha}{(e+x^k)\sqrt{|x^4-1|}}}_{f(x)}\,dx$ L'integrale ha TRE PUNTI DA DISCUTERE : $x=0$, $x=1$, $x=+\infty$

VICINO A ZERO $f(x) \simeq \frac{x^\alpha}{e}$ che è integrabile per $\alpha > -1$

VICINO A 1 $f(x) \simeq \frac{\text{costante}}{\sqrt{|x-1|}}$ che è integrabile ($\forall \alpha$)

A $+\infty$ $f(x) \simeq \frac{x^\alpha}{x^k\, x^2} = \frac{1}{x^{k+2-\alpha}}$ che è integrabile per $k+2-\alpha > 1$ cioè per $\alpha < k+1$

DUNQUE CI VUOLE $\boxed{-1 < \alpha < k+1}$

(8) Risolvendo $y' = \sqrt{1-y^2}$ $y(x_0)=y_0$:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \int_{x_0}^{x} dt \Leftrightarrow \arcsin(y(x)) - \arcsin(y_0) = x - x_0$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sin\left(x - x_0 + \arcsin(y_0)\right) = \sin\left(x - x_0 + \pi/4\right)$$

(dato che $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$) .. La $y(x)$ si può definire fino a a che $-\frac{\pi}{2} \leq x - x_0 + \pi/4 \leq \frac{\pi}{2}$, DOPO DI CHE si può prendere $y(x)$ costante (che verifica l'equazione)

In mostanza

$$y(x)=\begin{cases} 1 & se \quad x > x_0+\frac{\pi}{4} \\ \sin\left(x-x_0+\frac{\pi}{4}\right) & se \quad -\frac{3}{4}\pi+x_0 \le x \le \frac{\pi}{4}+x_0 \\ -1 & se \quad x < -\frac{3}{4}\pi+x_0 \end{cases}$$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{1}{\tan^2(ax)+3\tan(ax)+2}\,dx$ prendo $y = ax \to dx = \frac{dy}{a}$

$\displaystyle\frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan^2(y)+3\tan(y)+2}\,dy$ prendo $\tan(y) = t \Rightarrow$

$y = \arctan(t) \qquad dy = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)(t^2+3t+2)}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)(t+1)(t+2)} =$$

(Riduzione in fratti semplici: ...) $\displaystyle = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1-3x}{10(t^2+1)} - \frac{1}{5}\frac{1}{t+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{10}\arctan(t) - \frac{3}{20}\ln(t^2+1) - \frac{1}{5}\ln(t+2) + \frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_0^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{20} + \lim_{t\to+\infty}\ln\frac{(t+1)^{1/2}}{(t^2+1)^{\frac{3}{20}}(t+2)^{1/5}} - \ln\left(\frac{1^{1/2}}{1^{3/20}\,2^{1/5}}\right)\right] = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{20}+\frac{1}{5}\ln(2)\right)$$

10) $\quad y' = \dfrac{2y}{x+1} - \dfrac{x-1}{4x+5} \qquad x > -1$

(a) Applico la formula risolutiva per le eq. lineari del I° ordine

$$y(x) = (x+1)^2 \left\{ y_0 - \int_0^x \frac{(t-1)}{(t+1)^2(4t+5)}\, dt \right\} = \quad \text{(usando la rid. in fratti semplici ..)}$$

$$(x+1)^2 \left\{ y_0 - \int_0^x \left(\frac{-2}{(1+t)^2} + \frac{9}{1+t} - \frac{36}{4t+5} \right) dt \right\} =$$

$$(x+1)^2 \left\{ y_0 - \left[\frac{2}{1+t} + 9 \ln \frac{1+t}{t+5/4} \right]_0^x \right\} =$$

$$(x+1)^2 \left\{ c - \frac{2}{1+x} + 9 \ln\left(\frac{4x+5}{x+1} \right) \right\}$$

dove $c = y_0 + 2 - 9\ln(5)$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} y(x) = \lim_{x \to -1^+} (x+1) \left\{ c(x+1) - 2 + 9(x+1)\ln\left(\frac{4x+5}{x+1}\right) \right\} = 0^-$

dato che il logaritmo "perde" e il segno dipende da -2

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > -9\ln(4) \iff y_0 > \bar{y} := -2 + 9\ln(5/4) \\ +\infty & \text{se } c = -9\ln(4) \iff y_0 = \bar{y} \\ -\infty & \text{se } c < -9\ln(4) \iff y_0 < \bar{y} \end{cases}$$

I casi con $>$ / $<$ sono evidenti; per caso con $c = -9\ln(4)$

$$y(x) = (x+1)^2 \left\{ -\frac{2}{1+x} + 9\ln\left(\frac{x+5/4}{x+1}\right)\right\} = (x+1)^2\left\{-\frac{2}{1+x} + 9\ln\left(1+\frac{1}{4(x+1)}\right)\right\}$$

$$= (x+1)^2\left\{-\frac{2}{1+x} + \frac{9}{4}\frac{1}{(1+x)} + o\left(\frac{1}{1+x}\right)\right\} = (x+1)^2\left\{\frac{7}{4}\frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x+1}\right)\right\} \to +\infty$$

(c) Per la monotonia consideriamo $F(x,y) = \frac{2y}{x+1} - \frac{x-1}{4x+5}$ (di modo che l'equazione si può scrivere $y' = F(x,y)$). Si ha (per $x > -1$)

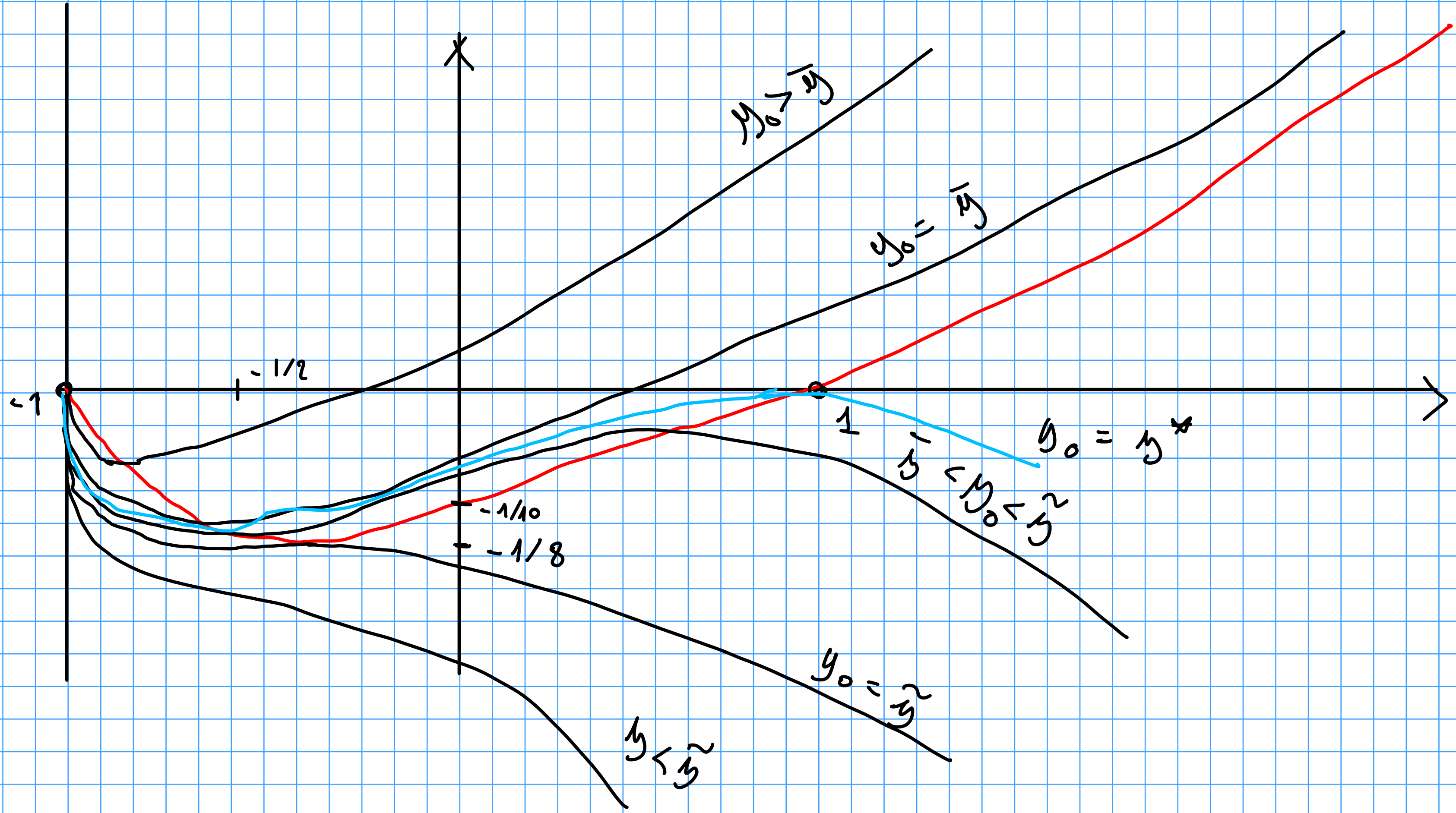
$F(x,y) > 0 \iff y > \frac{x^2-1}{2(4x+5)} =: g(x)$. Studio $g(x)$ su $[-1,+\infty[$

$g(\pm 1) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $g'(x) = \frac{2x^2+5x+2}{(4x+5)^2}$

$g'(x) = 0 \iff x = -1/2$ e $x = -2$ (non ci interessa). Traccio il grafico di g (linea rosso) da cui ricavo l'andamento delle soluzioni (crescono sopra g / decrescono sotto g). Noto che $g(-1/2) = -1/8$

Il valore $\tilde{y}$ è il valore y_0 per cui $y(-1/2) = -1/8$, cioè

$\tilde{y} = 2 - 9\ln(6)$



(d) Dal grafico si vede che $y(x) = 0$ ha due soluzioni per $y^* < y_0 < \bar{y}$ dove y^* è il dato iniziale per cui $y(1)=0$, cioè

$$y^* = -1 + 9 \ln(10/9)$$