Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 26 maggio 2012. FILA A

1. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2-\cos(2n)}{1+n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+1}$$

2. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)|1-x^2|^{\alpha}}\,dx$$

3. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):

$$\begin{cases} y''-5y'+6y=e^{3x} \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

4. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{2x}(e^{4x}+2e^{2x}+2)}\,dx$$

5. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'=\frac{6y}{x^2-9}-x \qquad -3<x<3.$$

   (a) dato $y_0\in\mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0)=y_0$ (2p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x\to-3^+$ e per $x\to3^-$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (4p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x)=0$ ha due radici in $]-3,3[$ (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3 E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.
AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 26 maggio 2012. FILA B

1. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{4^n+1} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3-\cos(3n)}{1+n^2}$$

2. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^3)|1-x^2|^{\alpha}}\,dx$$

3. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):

$$\begin{cases} y''-5y'+6y=-e^{2x} \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

4. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{3x}(e^{6x}+2e^{3x}+2)}\,dx$$

5. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{6y}{x^2-9} - x \qquad -3<x<3.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0)=y_0$ (2p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -3^+$ e per $x \to 3^-$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (4p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x)=0$ ha due radici in $]-3,3[$ (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3 E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.
AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 26 maggio 2012. FILA C

1. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4-\cos(4n)}{1+n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{5^n+1}$$

2. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^4)|1-x^2|^{\alpha}}\, dx$$

3. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p.):

$$\begin{cases} y''+5y'+6y=-e^{-3x} \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

4. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{-2x}(e^{-4x}+2e^{-2x}+2)}\, dx$$

5. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{6y}{x^2-9} - x \qquad -3 < x < 3.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (2p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -3^+$ e per $x \to 3^-$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (4p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-3,3[$ (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3 E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.
AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale/Chimica. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 26 maggio 2012. FILA D

1. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{6^n+1} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5-\cos(5n)}{1+n^2}$$

2. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^5)|1-x^2|^{\alpha}}\, dx$$

3. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (5p):

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = e^{-2x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

4. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{-3x}(e^{-6x}+2e^{-3x}+2)}\, dx$$

5. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{6y}{x^2-9} - x \qquad -3 < x < 3.$$

   (a) dato $y_0 \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione $y(0) = y_0$ (2p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti delle soluzioni per $x \to -3^+$ e per $x \to 3^-$ (4p.);
   (c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di y_0 (4p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-3,3[$ (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3 E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.
AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 26 05 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

1. (a) ~~AC~~ C NC (b) ~~AC~~ C NC

2. α $0 < \alpha < 1$

3. $y(x) =$ $x e^{3x}$

4. integ.= $\dfrac{2 - \ln(5)}{2}$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione dell'ultimo esercizio.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 26 05 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

1. (a) ~~AC~~ C NC (b) ~~AC~~ C NC

2. α $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$

3. $y(x) =$ $x e^{2x}$

4. integ.= $\dfrac{2 - \ln(5)}{12}$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione dell'ultimo esercizio.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 2 6 0 5 2012

voto	

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

1. (a) ~~AC~~ | C | NC (b) ~~AC~~ | C | NC

2. α $-1 < \alpha < 1$

3. $y(x) =$ $x e^{-3x}$

4. integ.= $\dfrac{2 - \ln(5)}{8}$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione dell'ultimo esercizio.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 26 05 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

1. (a) ~~AC~~ C NC (b) ~~AC~~ C NC

2. α $-\frac{3}{2} < \alpha < 1$

3. $y(x) =$ $x e^{-2x}$

4. integ.= $\frac{2 - \ln(5)}{12}$

Le facciate bianche sono riservate alla risoluzione dell'ultimo esercizio.

5) $y' = \dfrac{6y}{x^2-9} - x$ Eq. lineare del I° ordine con $a(x) = \dfrac{6}{x^2-9}$ $b(x) = -x$

Allora $A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^x \dfrac{6\,dt}{t^2-9} = \int_0^x \left(\dfrac{1}{t-3} - \dfrac{1}{t+3}\right)dt = \left[\ln\left|\dfrac{t-3}{t+3}\right|\right]_0^x$

$= \left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| = \dfrac{3-x}{x+3}$ (se siamo in $\{-3 < x < 3\}$)

$\Rightarrow \quad y(x) = e^{A(x)}\left\{y(0) + \int_0^x b(t)\,e^{-A(t)}\,dt\right\} =$

$\dfrac{3-x}{x+3}\left\{y_0 - \int_0^x t\,\dfrac{(3+t)}{3-t}\,dt\right\} = \dfrac{3-x}{x+3}\left\{y_0 + \int_0^x \dfrac{t^2+3t}{t-3}\,dt\right\}$

$$= \boxed{\dfrac{3-x}{x+3}\left\{y_0 + \dfrac{x^2}{2} + 6x + 18\ln\left(\dfrac{3-x}{3}\right)\right\}}$$

(dato che $\dfrac{t^2+3t}{t-3} = t + 6 + \dfrac{18}{t-3} \Rightarrow \int_0^x \dfrac{t^2+3t}{t-3}\,dt = \dfrac{x^2}{2} + 6x + 18\ln\left|\dfrac{x-3}{3}\right|$

Allora: $\lim_{x\to -3^+} y(x) = \dfrac{6}{0^+}\left\{y_0 + \dfrac{9}{2} - 18 + 18\ln\left(\dfrac{6}{3}\right)\right\} = \dfrac{6}{0^+}\left(y_0 - \dfrac{27}{2} + \ln(2)\right)$

$$= \boxed{\begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > \bar{y} =: \dfrac{27}{2} - \ln(2) \\ 0 & \text{se } y_0 = \bar{y} \\ -\infty & \text{se } y_0 < \bar{y} \end{cases}}$$

Il caso $y_0 = \bar{y}$ va trattato a parte essendo $\frac{0}{0}$. Si può usare de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to -3^+} (3-x)\,\frac{\bar{y} + \frac{x^2}{2} + 6x + 18\ln\left(\frac{3-x}{3}\right)}{3+x} = 6 \lim_{x\to -3^+} \frac{\bar{y} + \frac{x^2}{2} + 6x + 18\ln\left(\frac{3-x}{3}\right)}{3+x}$$

$$= 6 \lim_{x\to -3^+} \frac{x + 6 + \frac{18}{3-x}}{1} = 6\cdot\left(-3+6-\frac{18}{6}\right) = 0$$

INVECE $\boxed{\lim_{x\to 3^-} y(x) = 0^-}$

dato che la forma indeterminata $(3-x)\ln(3-x) \to 0^-$.

PER LA MONOTONIA INTRODUCIAMO LA $F(x,y) = \frac{6y}{x^2-9} - x$

(così che l'eq. diventa $y' = F(x,y)$). Si ha

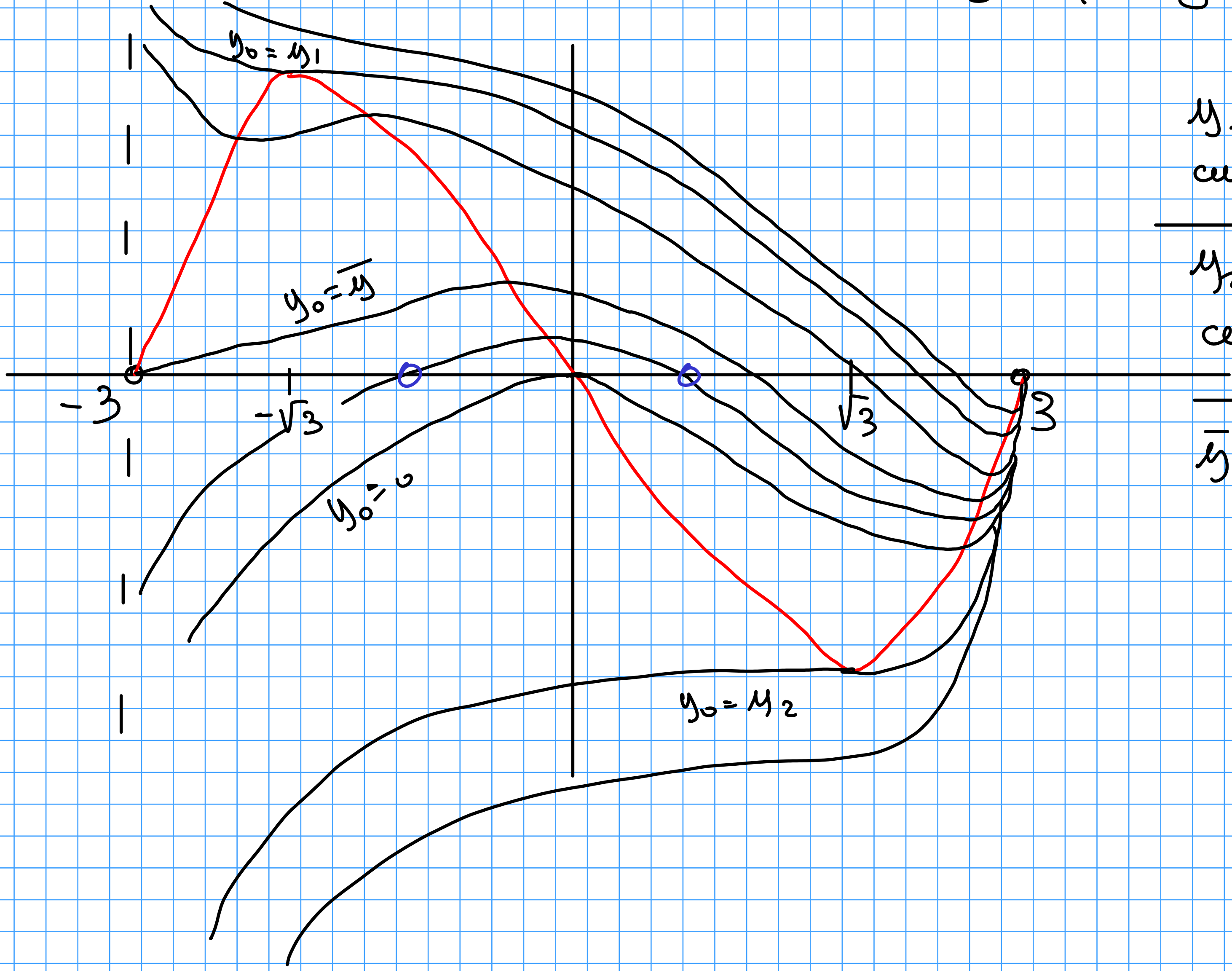
$F(x,y) > 0 \iff y < \frac{x(x^2-9)}{6} =: g(x)$ (NOTA CHE $x^2-9<0$!!)

Studiamo $g(x)$. g è un polinomio di III° grado con

$0 = g(-3) = g(0) = g(3)$ e con $g'(x) = \frac{3x^2-9}{6}$

per cui g ha un max. rel. (un min. rel.) in $x=-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$ ($x=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$)

SE NE DEDUCONO I GRAFICI DELLE $y(x)$ (la $g(x)$ è in rosso)



y_1 tale che la relativa curva passa per $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

y_2 tale che la relativa curva passa per $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$\bar{y}$ è quello visto sopra.

Si vede allora che le soluzioni passano DUE volte per $y=0$

$\iff \quad 0 < y_0 < \bar{y}$.