Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 11 febbraio 2012.

1. Si riporti l'enunciato del teorema di permanenza del segno (2 p.).
2. Si scriva la formula di Taylor con il resto nella forma di Peano (2 p.).
3. Si enunci il criterio di Leibniz per le serie (punti 2).
4. Si scriva la formula di integrazione per parti. (punti 2).
5. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4^n n! + 5^n}{2^n n^n + n!} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+2n+1} - n)(n + \ln(n))$$

6. Si calcoli il seguente limite di funzione (4 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\frac{1}{2}\sin^2(x))^{\frac{2}{x}} - e^x}{x^3}$$

7. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (2p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n n!}{n^n} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{n^3+1} - n)$$

8. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 2)

$$y'' - 4y' + 4y = xe^x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

9. Si studi la funzione f definita da $f(x) := \left|\frac{x-1}{x+1}\right| e^{-x}$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (4 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) + 20 = 0$ (1 punti).
10. Si calcoli l'integrale seguente (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 5).

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\ln(x/e)}{\ln(ex)\ln^4(x)}}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore. Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

I punti 1–4 sono domande di teoria a cui bisogna rispondere in modo completo, ma sintetico (dire tutto e non aggiundere dettagli inutili).
Per gli esercizi 5–8 conta solo la risposta.
Gli esercizi 9 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento.
Per la validità del compito è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi otto punti (1-8) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.

PROVA SCRITTA DI ANALISI I DATA 11 02 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

1. Supponiamo che esista il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

(dove $x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$). Allora se $\ell > 0$ esiste un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in U \quad \text{con } x \neq x_0$$

2. Se f è derivabile n volte vicino a x_0, allora esiste un unico polinomio $P(x)$, di grado $\leq n$ tale che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. Tale polinomio

è dato da $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$

3. Se $\{a_n\}$ è una successione tale che

$a_{n+1} \geq a_n \; \forall n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\quad (\Rightarrow a_n \geq 0)$

allora la serie a segni alterni $\sum_n (-1)^n a_n$ è convergente

4. Siano F e G due funzioni derivabili con derivata continua su $[a,b]$ e siano $f = F'$, $g = G'$. Allora

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

5. (a) 0 (b) $2/3$

6. $-\frac{7}{12}$

7. (a) AC | C | ~~NC~~ (b) ~~AC~~ | C | NC

8. $y(x) = (x+2)e^{x} - (x+1)e^{2x}$

I FOGLI BIANCHI SONO RISERVATI ALLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI 9 E 10.

5) (a) $$\frac{4^n n! + 5^n}{2^n n^n + n!} = \frac{4^n n!\left(1 + \left(\frac{5}{4}\right)^n / n!\right)}{2^n n^n\left(1 + n!/2^n n^n\right)} = \frac{2^n n!}{n^n}\,\frac{1+o(1)}{1+o(1)}$$

perché $$\frac{(5/4)^n}{n!} \to 0 \quad e \quad \frac{n!}{n^n} \to 0$$

Dunque basta fare il limite di $\frac{2^n n!}{n^n}$. Facendo il rapporto

$$\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{2}{e} < 1 \,. \quad \text{Dunque } \frac{2^n n!}{n^n} \to 0$$

(b) $$\left(\sqrt[3]{n^3+2n+1} - n\right)\left(n + \ln(n)\right) = n\left(\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3} - 1\right) n \left(1 + \frac{\ln(n)}{n}\right) =$$

$$n^2 \left[1 + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/3} - 1\Big]\left(1+o(1)\right) = n^2\left(\cancel{1} + \frac{2}{3}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1}\right)\left(1+o(1)\right) =$$

$$\left(\frac{2}{3} + o(1)\right)\left(1+o(1)\right) \to \frac{2}{3}$$

(si è usato $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ e il fatto che $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$)

6) $$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\frac{1}{2}\sin^2(x)\right)^{\frac{2}{x}} - e^x}{x^3}$$. Usiamo Taylor

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2$$

$$x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2(x)\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right) =$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + O\left(O(x^2)^3\right) =$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) = \frac{x^2}{2} - \frac{7x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2(x)\right) = x - \frac{7}{12}x^3 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\sin^2(x)\right)^{\frac{2}{x}} = e^{\frac{2}{x}\ln\left(1+\frac{1}{2}\sin^2(x)\right)} = e^{x - \frac{7}{12}x^3 + o(x^4)} =$$

$$1 + x - \frac{7}{12}x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(x + o(x^2)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + o(x^2)\right)^3 + O(x^4) =$$

$$1+x-\frac{7}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{12}x^3+o(x^3)$$

INFINE

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2}\sin^2(x)\right)^{\frac{2}{x}}-e^x}{x^3}=\frac{1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{12}x^3+o(x^3)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3}=$$

$$\frac{-\frac{7}{12}x^3+o(x^3)}{x^3}=-\frac{7}{12}+o(1)\to-\frac{7}{12}$$

8) a) $a_n=(-1)^n\frac{3^n n!}{n^n}$. Possiamo a $|a_n|=\frac{3^n n!}{n^n}$. Usiamo il criterio del rapporto: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}=3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to\frac{3}{e}>1$

Dunque $\sum_n |a_n|=+\infty$ (e la serie NON CONV. ASS.) Però il limite sopra implica che $|a_n|\to+\infty \Rightarrow$ a_n NON TENDE A ZERO e quindi

$\sum_n a_n$ NON PUÒ CONVERGERE

(b) $a_n=(-1)^n\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$. Possiamo ad $|a_n|=\sqrt[3]{n^3+1}-n$

$$\Rightarrow |a_n|=n\left(\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3}-1\right)=n\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)-1\right)=\frac{1}{n^2}(1+o(1)).$$

Dunque $|a_n| \simeq \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_n |a_n| < +\infty \Rightarrow$ la serie CONV. ASS.

8) $y'' - 4y' + 4y = x e^x \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

OMOGENEA: $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$

(il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$ ha $z = 2$ come radice doppia)

Cerchiamo una sol. particolare del tipo $y(x) = (ax+b)e^x \Rightarrow$

$y'(x) = (ax + a + b)e^x \qquad y'' = (ax + 2a + b)e^x \Rightarrow$

$y'' - 4y' + 4y = (ax + 2a + b - 4ax - 4a - 4b + 4ax + 4b)e^x = (ax - 2a + b)e^x$

$\Rightarrow a = 1 \quad b = 2$ cioè $\bar{y}(x) = (x+2)e^x \Rightarrow$

$y(x) = (Ax+B)e^{2x} + (x+2)e^x \Rightarrow y(0) = B + 2$

$y'(x) = (2Ax + 2B + A)e^{2x} + (x+3)e^x \Rightarrow y'(0) = 2B + A + 3$

$\Rightarrow \begin{cases} B+2 = 1 \\ 2B + A + 3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow B = -1, \quad A = -1$ cioè $y(x) = (x+2)e^x - (x+1)e^{2x}$

9) $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| e^{-x}$. Conviene considerare $g(x) = \frac{x-1}{x+1} e^{-x}$

DOMINIO di g (e di f) è $\{x : x+1 \neq 0\} = \{x \neq -1\}$

SEGNO di g: $\frac{x-1}{x+1} > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$,

$g(x) = 0$ se $x = 1$, $g(x) < 0$ se $x \in]-1, 1[$

OVVIAMENTE $f(x) \geq 0 \ \forall x$ e $f(x) = 0 \iff x = 1$. Notiamo che

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\\ -g(x) & \text{se } x \in]-1, 1[\end{cases}$$

LIMITI $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1 \cdot \infty = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1 \cdot 0 = 0$

$\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$

Dal punto di vista di f: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \ (0^+)$

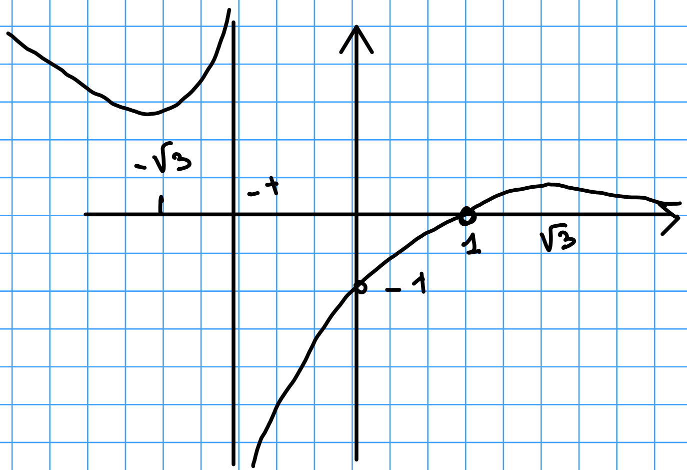
DERIVATA E MONOTONIA DI g:

$$g'(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot (-e^{-x}) + \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} e^{-x} = \frac{1-x^2+3}{(x+1)^2} e^{-x} = \frac{3-x^2}{(x+1)^2} e^{-x}$$

che si annulla in $x = \pm\sqrt{3}$ ed è > 0 in $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, mentre è < 0 fuori da $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ $\Rightarrow$

$\searrow \ -\sqrt{3} \ \nearrow \ -1 \ \nearrow \ \sqrt{3} \ \searrow$

DUNQUE IL GRAFICO DI g:



Notiamo che $g(0) = -1$

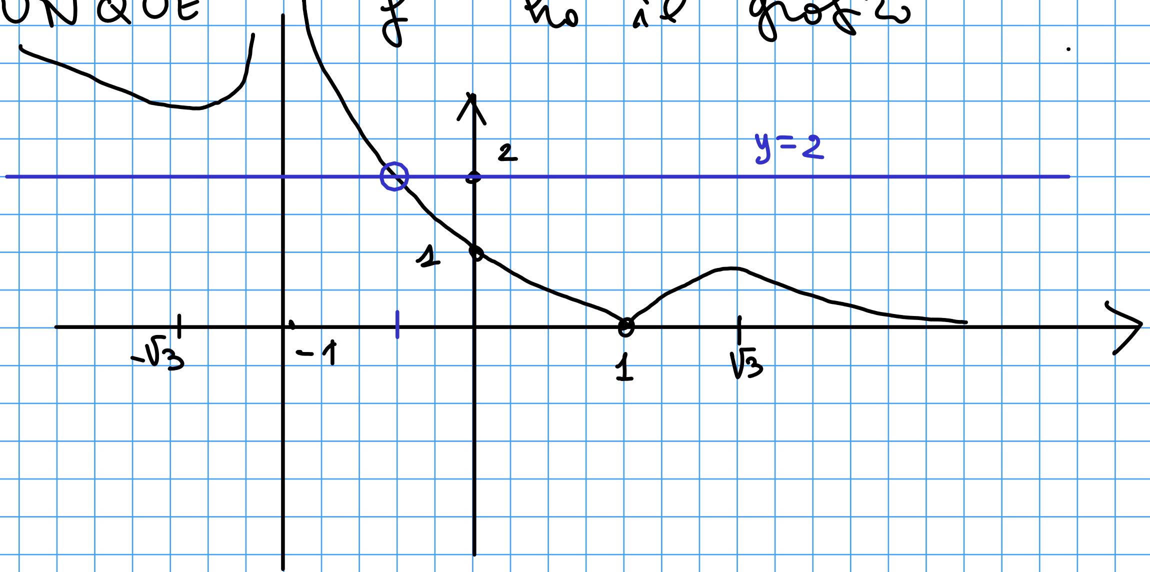
$$g(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1} e^{\sqrt{3}} = \frac{-(\sqrt{3}+1)^2}{-2} e^{\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3}) e^{\sqrt{3}} > 2$$

$$g(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} e^{-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} e^{-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}}} < 2$$

Se passiamo a f basta "rovesciare" g dove quest'ultima è negativa

(se si vuole ragionare direttamente su f bisogna dire che $f'(x) = \frac{3-x^2}{(1+x)^2} e^{-x}$ se $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, mentre $f'(x) = \frac{x^2-3}{(1+x^2)} e^{-x}$ se $-1 < x < 1$)

DUNQUE f ha il grafico



DATO CHE

$$f(\sqrt{3}) < 2 < f(-\sqrt{3})$$

l'equazione $f(x) = 2$

HA SOLO UNA SOLUZIONE

(compresa tra -1 e 0)

10)
$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{\ln(x/e)}{\ln(ex)\ln^4 x}}\,dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln^2(x)}\sqrt{\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)+1}}\,dx = \left(y=\ln(x)\right)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\,dy = \left(\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{y-1}{y+1}} = t^2 \iff y-1 = t^2 y + t^2 \iff y = \dfrac{t^2+1}{1-t^2} \\ dy = \dfrac{2t(1-t^2)+2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\,dt = \dfrac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt \end{array}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\,t\,\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 2t\,\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt = \left[2t\,\frac{(-1)}{(1+t^2)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$-\frac{2}{2} + \Big[2\arctan(t)\Big]_0^1 = -1 + 2\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}-1}$$