

1. Sia  $f(x) := \ln(\cos(2x))$ . Si calcolino (2+2p.):

$$(a) \quad f''(0), \quad (b) \quad f'''(0).$$

2. Sia  $f(x) := x^2 - 6|x| + 3$ . Si trovino (2+2 punti):

$$(a) \quad \min_{-7 \leq x \leq 7} f(x), \quad (b) \quad \max_{-7 \leq x \leq 7} f(x).$$

3. Si consideri l'insieme:

$$A := \{y \in \mathbb{R} : \arctan(4x) < 5y \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Si dica quanto fanno (2+2 punti):

$$(a) \quad \inf A, \quad (b) \quad \sup A.$$

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2+2 punti)

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n + n!)(3^n + n^4)}{n^n + n!}, \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2n! + 3^n}}{\ln^4(n)}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} - e \cos(x)}{x^2}$$

6. Studiare la funzione  $f$  definita da  $f(x) := \left| \frac{x+1}{x-1} \right| e^x$ , determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescita e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di  $f$  che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = 1$  (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.  
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)  
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 5 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 6 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):

- (a) IL VOTO NEI PUNTI 1-5 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
- (b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

1. Sia  $f(x) := \ln(\cos(5x))$ . Si calcolino (2+2p.):

$$(a) \quad f''(0), \quad (b) \quad f'''(0).$$

2. Sia  $f(x) := x^2 - 6|x| + 2$ . Si trovino (2+2 punti):

$$(a) \quad \min_{-7 \leq x \leq 7} f(x), \quad (b) \quad \max_{-7 \leq x \leq 7} f(x).$$

3. Si consideri l'insieme:

$$A := \{y \in \mathbb{R} : \arctan(3x) < 4y \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Si dica quanto fanno (2+2 punti):

$$(a) \quad \inf A, \quad (b) \quad \sup A.$$

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2+2 punti)

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n + n!}{(5^n + n!)(2^n + n^3)}, \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3(n)}{\sqrt[n]{5n! + 2^n}}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} - e \cos(x)}{x^2}$$

6. Studiare la funzione  $f$  definita da  $f(x) := \left| \frac{x+1}{x-1} \right| e^x$ , determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescita e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di  $f$  che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = 1$  (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.  
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)  
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 5 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 6 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):

- (a) IL VOTO NEI PUNTI 1-5 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
- (b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

1. Sia  $f(x) := \ln(\cos(4x))$ . Si calcolino (2+2p.):

$$(a) \quad f''(0), \quad (b) \quad f'''(0).$$

2. Sia  $f(x) := x^2 - 6|x| + 5$ . Si trovino (2+2 punti):

$$(a) \quad \min_{-7 \leq x \leq 7} f(x), \quad (b) \quad \max_{-7 \leq x \leq 7} f(x).$$

3. Si consideri l'insieme:

$$A := \{y \in \mathbb{R} : \arctan(2x) < 3y \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Si dica quanto fanno (2+2 punti):

$$(a) \quad \inf A, \quad (b) \quad \sup A.$$

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2+2 punti)

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4^n + n!)(5^n + n^2)}{n^n + n!}, \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{4n! + 5^n}}{\ln^2(n)}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} - e \cos(x)}{x^2}$$

6. Studiare la funzione  $f$  definita da  $f(x) := \left| \frac{x+1}{x-1} \right| e^x$ , determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescita e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di  $f$  che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = 1$  (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.  
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)  
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 5 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 6 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):

- (a) IL VOTO NEI PUNTI 1-5 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
- (b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

1. Sia  $f(x) := \ln(\cos(3x))$ . Si calcolino (2+2p.):

$$(a) \quad f''(0), \quad (b) \quad f'''(0).$$

2. Sia  $f(x) := x^2 - 6|x| + 4$ . Si trovino (2+2 punti):

$$(a) \quad \min_{-7 \leq x \leq 7} f(x), \quad (b) \quad \max_{-7 \leq x \leq 7} f(x).$$

3. Si consideri l'insieme:

$$A := \{y \in \mathbb{R} : \arctan(5x) < 2y \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Si dica quanto fanno (2+2 punti):

$$(a) \quad \inf A, \quad (b) \quad \sup A.$$

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2+2 punti)

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n + n!}{(3^n + n!)(4^n + n^5)}, \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^5(n)}{\sqrt[n]{3n! + 4^n}}.$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} - e \cos(x)}{x^2}$$

6. Studiare la funzione  $f$  definita da  $f(x) := \left| \frac{x+1}{x-1} \right| e^x$ , determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescita e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di  $f$  che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = 1$  (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.  
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)  
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 5 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 6 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):

- (a) IL VOTO NEI PUNTI 1-5 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
- (b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

Data: 

0	6	0	2
---	---	---	---

 2012

Cognome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Fila del compito: 

A
---

- |  |                   |   |            |
|--|-------------------|---|------------|
| <p>1. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td style="font-size: 2em;">- 4</td></tr></table></p>                           | - 4               | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td style="font-size: 2em;">0</td></tr></table></p>                       | 0          |
| - 4  |                   |   |            |
| 0  |                   |   |            |
| <p>2. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td style="font-size: 2em;">- 6</td></tr></table></p>                           | - 6               | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td style="font-size: 2em;">10</td></tr></table></p>                      | 10         |
| - 6  |                   |   |            |
| 10   |                   |   |            |
| <p>3. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td style="font-size: 1.5em;"><math>\frac{\pi}{10}</math></td></tr></table></p> | $\frac{\pi}{10}$  | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td style="font-size: 1.5em;">+ <math>\infty</math></td></tr></table></p> | + $\infty$ |
| $\frac{\pi}{10}$   |                   |   |            |
| + $\infty$   |                   |   |            |
| <p>4. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td style="font-size: 1.5em;">+ <math>\infty</math></td></tr></table></p>       | + $\infty$        | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td style="font-size: 1.5em;">+ <math>\infty</math></td></tr></table></p> | + $\infty$ |
| + $\infty$   |                   |   |            |
| + $\infty$   |                   |   |            |
| <p>5. <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td style="font-size: 1.5em;"><math>\frac{11}{24} e</math></td></tr></table></p>    | $\frac{11}{24} e$ |   |            |
| $\frac{11}{24} e$  |                   |   |            |

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

Data: 

0	6
---	---

0	2
---	---

 2012

Cognome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Fila del compito: 

B
---

1. (a) 

$-25$
-------

 (b) 

$0$
-----
2. (a) 

$-7$
------

 (b) 

$9$
-----
3. (a) 

$\frac{\pi}{8}$
-----------------

 (b) 

$+\infty$
-----------
4. (a) 

$+\infty$
-----------

 (b) 

$0$
-----
5. 

$\frac{11}{2A} e$
-------------------

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

Data: 

0	6	0	2
---	---	---	---

 2012

Cognome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Fila del compito: 

C
---

- |   |                   |  |           |
|---|-------------------|--|-----------|
| <p>1. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>-16</math></td></tr></table></p>           | $-16$             | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>0</math></td></tr></table></p>       | $0$       |
| $-16$   |                   |  |           |
| $0$   |                   |  |           |
| <p>2. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>-4</math></td></tr></table></p>            | $-4$              | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>12</math></td></tr></table></p>      | $12$      |
| $-4$  |                   |  |           |
| $12$  |                   |  |           |
| <p>3. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>\frac{\pi}{6}</math></td></tr></table></p> | $\frac{\pi}{6}$   | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>+\infty</math></td></tr></table></p> | $+\infty$ |
| $\frac{\pi}{6}$   |                   |  |           |
| $+\infty$   |                   |  |           |
| <p>4. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>+\infty</math></td></tr></table></p>       | $+\infty$         | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>+\infty</math></td></tr></table></p> | $+\infty$ |
| $+\infty$   |                   |  |           |
| $+\infty$   |                   |  |           |
| <p>5. <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>\frac{11}{24} e</math></td></tr></table></p>   | $\frac{11}{24} e$ |  |           |
| $\frac{11}{24} e$   |                   |  |           |

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

Data: 

0	6	0	2
---	---	---	---

 2012

Cognome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Fila del compito: 

D
---

- |   |                  |  |           |
|---|------------------|--|-----------|
| <p>1. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>-9</math></td></tr></table></p>            | $-9$             | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>0</math></td></tr></table></p>       | $0$       |
| $-9$  |                  |  |           |
| $0$   |                  |  |           |
| <p>2. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>-5</math></td></tr></table></p>            | $-5$             | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>11</math></td></tr></table></p>      | $11$      |
| $-5$  |                  |  |           |
| $11$  |                  |  |           |
| <p>3. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>\frac{\pi}{4}</math></td></tr></table></p> | $\frac{\pi}{4}$  | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>+\infty</math></td></tr></table></p> | $+\infty$ |
| $\frac{\pi}{4}$   |                  |  |           |
| $+\infty$   |                  |  |           |
| <p>4. (a) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>0</math></td></tr></table></p>             | $0$              | <p>(b) <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>0</math></td></tr></table></p>       | $0$       |
| $0$   |                  |  |           |
| $0$   |                  |  |           |
| <p>5. <table border="1" style="display: inline-table; width: 200px; height: 30px; text-align: center; vertical-align: middle;"><tr><td><math>\frac{11}{24}e</math></td></tr></table></p>    | $\frac{11}{24}e$ |  |           |
| $\frac{11}{24}e$  |                  |  |           |



(1)  $f(x) = \ln(\cos(Ax))$ . Per calcolare  $f''(0), f'''(0)$  si possono calcolare  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$  e poi mettere  $x=0$  — OPPURE si può usare Taylor. Per usare il secondo modo usiamo gli sviluppi noti:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad (\text{è importante } o(x^3) \text{ e non } o(x^2))$$

$$\ln(1+y) = y + o(y^2) \quad (\text{è importante } o(y^2) \text{ e non } o(y) - \text{oppure } -\frac{y^2}{2} + o(y^2))$$

$$\begin{aligned} \ln(\cos(Ax)) &= \ln\left(1 - \underbrace{\frac{A^2 x^2}{2} + o(x^3)}_y\right) = \frac{-A^2 x^2}{2} + o(x^3) + o\left(\left(-\frac{A^2 x^2}{2} + o(x^3)\right)^2\right) = \\ &= \frac{-A^2 x^2}{2} + o(x^3) \quad \underbrace{O(O(x^2)^2) = O(x^4) = o(x^3)} \end{aligned}$$

Ne segue che  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = -A^2$ ,  $f'''(0) = 0$

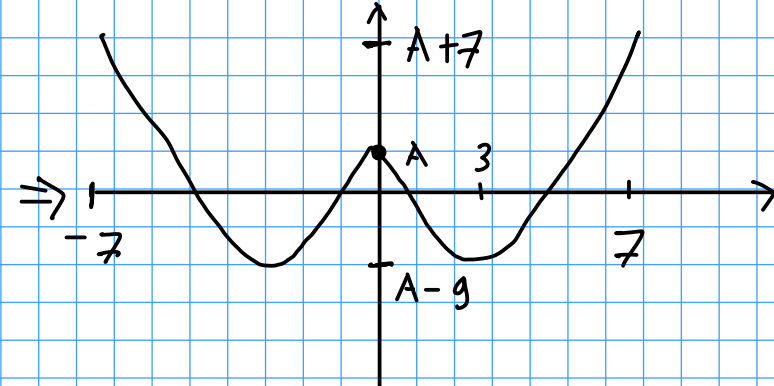
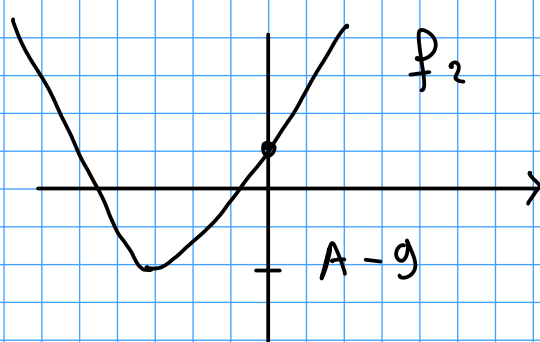
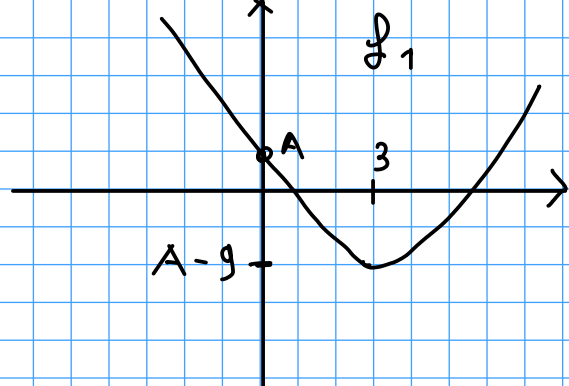
(2) Facciamo il grafico di  $f(x)$  ( $A$  è una costante che dipende dallo  $f(0)$ )

$$f_1(x) = x^2 - 6x + A$$

$$f_2(x) = x^2 + 6x + A$$

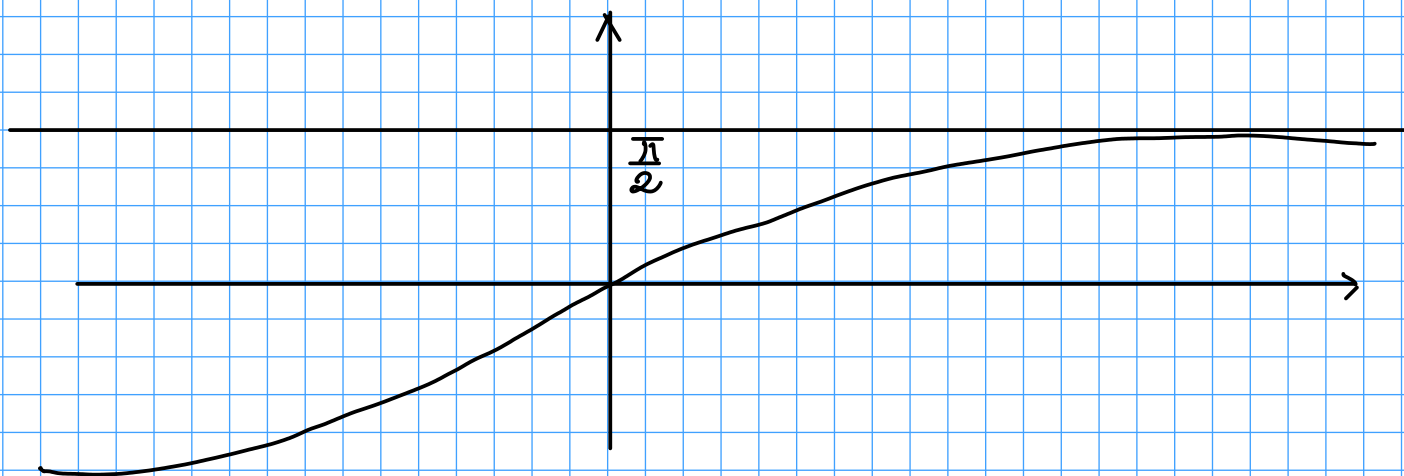
notando che  $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f_2(x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

(si potrebbe anche studiare solo  $f_1$  su  $[0, 6]$ , notando che  $f$  è pari).



$$f(0) = A, \quad f(\pm 7) = A+7, \quad f(3) = A-g$$

(3) Consideriamo la funzione  $f(x) = \arctan(ax)$ , che ha il grafico:



(i diversi valori di  $a$  producono un "combo di scale" nelle  $x$  che non modificano l'immagine di  $f$

Dunque le usate che  $b \cap \{y > f(x) \forall x\}$  sono esattamente le usate che

$$b \cap \{y \geq \frac{\pi}{2}\}. \text{ In altre parole } A = \{y : y \geq \frac{\pi}{2b}\} = [\frac{\pi}{2b}, +\infty[$$

$$\text{Dunque } \inf A = \frac{\pi}{2b}, \quad \sup A = +\infty$$

(4) (a) 
$$Q_m = \frac{(a^m + m!)(b^n + n^c)}{m^m + m!} = \frac{m! b^m}{m^m} \frac{(1 + e^m/m!)(1 + m^c/b^n)}{1 + m!/m^m} =$$

$$\frac{m! b^m}{m^m} (1 + o(1)).$$
 Dunque basta vedere cosa fa  $b_n = \frac{m! b^n}{m^n}$

Calcoliamo 
$$\frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{(m+1)! b^{m+1}}{(m+1)^{m+1}} \cdot \frac{m^m}{m! b^m} = b \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \rightarrow \frac{b}{e}$$

Ne segue che  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > e \\ 0 & \text{se } b < e \end{cases}$

*Nelle file B/D c'è poi da fare il reciproco*

(b) 
$$Q_m = \frac{\sqrt[m]{am! + b^m}}{\ln^c(m)} = \frac{\sqrt[m]{a} \sqrt[m]{m!}}{\ln^c(m)} \sqrt[m]{1 + b^m/a^m} = \frac{\sqrt[m]{m!}}{\ln^c(m)} (1 + o(1))$$

Ricordiamo che  $\sqrt[m]{\frac{m!}{m^m}} \rightarrow \frac{1}{e}$  (caso)  $\Rightarrow \sqrt[m]{m!} = \frac{m}{e} (1 + o(1))$  e quindi

$$Q_m = \frac{m}{\ln^c(m)} \frac{1}{e} (1 + o(1)) \rightarrow +\infty \quad (m \text{ "vince" su } \ln^c(m) \quad \forall c)$$

*Nelle file B/D si pensa al reciproco: viene 0*

(5) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} - e \cos(ax)}{x^2}$$

Usiamo Taylor. Notiamo che

$$(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} = e^{\frac{\sqrt{1+x}}{x} \ln(1+x)}$$

Allora

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \Rightarrow$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2), \text{ inoltre}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), \text{ da cui}$$

$$\sqrt{1+x} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) =$$

$$1 - \cancel{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) + \cancel{\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) - \frac{x^2}{8} + o(x^2) =$$

$$1 - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2). \text{ Dobbiamo che } e^y = 1 + y + o(y)$$

$$(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} = e^{1 - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)} = e e^{-\frac{1}{24}x^2 + o(x^2)} = e \left(1 - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)\right) = e - \frac{e}{24}x^2 + o(x^2)$$

Infine

$$\frac{(1+x)^{\frac{\sqrt{1+x}}{x}} - e \cos(x)}{x^2} = \frac{e - \frac{e}{24}x^2 + o(x^2) - e\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} =$$

$$\frac{\left(-\frac{e}{24} + \frac{e}{2}\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} \rightarrow \frac{11e}{24}$$

6)  $f(x) = \left| \frac{x+1}{x-1} \right| e^x$ . Conviene considerare  $g(x) = \frac{x+1}{x-1} e^x$   
 $(\Rightarrow f(x) = |g(x)|)$

e fare prima il grafico di  $g$ . Allora

SEGNO È chiaro che  $g(x) \geq 0 (\Leftrightarrow x < -1 \text{ o } x > 1)$ ,  $g(x) = 0 (\Leftrightarrow x = -1)$

LIMITI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \cdot +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \cdot 0 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$$

$$\left( \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \end{array} \right)$$

DERIVATA

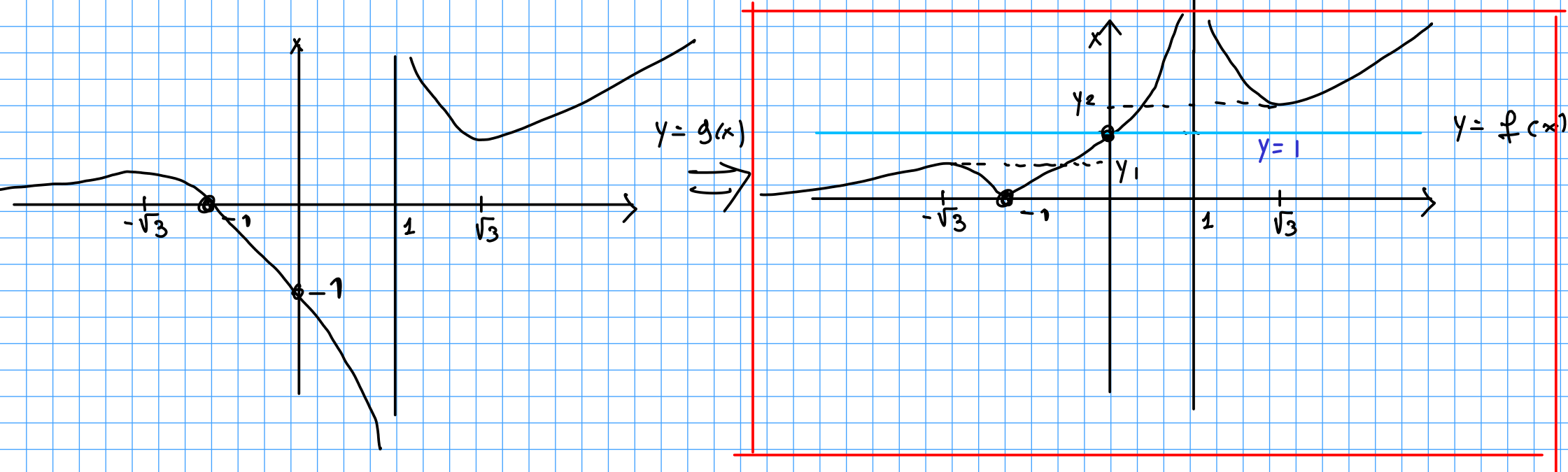
e MONOTONIA

Si ha

$$g'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} e^x + \frac{x+1}{x-1} e^x = \frac{x^2-3}{(x-1)^2} e^x$$

e quindi  $g'(x) = 0 (\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3})$ . Dunque  $g$  ha il grafico

mostrato di seguito da cui si trova il grafico di  $f$  "invertendo" quello di  $g$  nelle zone in cui  $g \leq 0$



Focendo i calcoli si vede che:

$$f(0) = 1$$

$$(1) f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}-1} e^{-\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} =: y_1 < 1$$

$$(\text{dato che } (2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} < \frac{2}{e^{\sqrt{3}}} < \frac{2}{e} < 1)$$

$$(2) f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} e^{\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}} =: y_2 > 1$$

Dunque  $f(x) = 1$  HA SOLU LA SOLUZIONI  $x=0$  ( $\Rightarrow$  1 SOLUZIONE)

OSS Nel punto  $x = -1$   $f$  non è DERIVABILE IN QUANTO

$$f'(-1^-) = g'(-1) < 0 \quad \text{mentre} \quad f'(-1^+) = -g'(-1) > 0$$