Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 9 gennaio 2012.

1. Si riporti la definizione di limite $-\infty$ per una successione $\{a_n\}$ (4 p.).
2. Data una funzione f definita un intervallo e ivi derivabile, si dica (enunciando l'opportuno teorema) quale legame c'è tra la monotonia di f e il segno di f' (4 p.).
3. Si enunci il criterio del confronto per le serie (punti 4).
4. Si scriva la formula risolutiva per l'equazione differenziale $y' = a(x)y + b(x)$ con condizione iniziale $y(x_0) = x_0$ (punti 4).
5. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n! + e^n}}{2n+3} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^5 + 10n^4 - 8n^3 + 15n^2 + n - 1} - n$$

6. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\sin^2(x)}\cos(2x) - 1}{(\cos(x) - 1)^2}$$

7. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + 1}{1+n^2} \qquad , \qquad (b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos(n)}{1+n^2}$$

8. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

9. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := e^{x+1}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 1$ (2 punti).

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore. Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

I punti 1–4 sono domande di teoria a cui bisogna rispondere in modo completo, ma sintetico (dire tutto e non aggiundere dettagli inutili).
Per gli esercizi 5–8 conta solo la risposta.
Gli esercizi 9 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento.
Per la validità del compito è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi otto punti (1-8) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 9 GENNAIO 2012

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	

voto

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ significa che per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste $\bar{n}$ in $\mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \leq K$

OPPURE: per ogni $K \in \mathbb{R}$ $a_n \leq K$ definitivamente

2. Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $[a,b]$ (basta continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$) allora

f crescente su $[a,b]$ SE E SOLO SE $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in]a,b[$
(decrescente) (≤ 0)

3. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che

$0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni n (basta definitivamente)

Allora se $\sum_n b_n$ converge si ha $\sum_n a_n$ converge
(se $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge)

4. $$y(x) = e^{A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt\right)$$

dove $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$

5. (a) 1/2e (b) 2

6. 8

7. (a) AC ~~C~~ NC (b) AC C ~~NC~~

8. $y(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x}$

I FOGLI BIANCHI SONO RISERVATI ALLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI 9 E 10.

(5) (a) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n! + e^n}}{2n+3}$. Allora $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{2n} \dfrac{\sqrt[n]{1+\frac{e^n}{n!}}}{1+3/2n}$

Notiamo che $\dfrac{e^n}{n!} \to 0$ (limite notevole)

e quindi $\sqrt[n]{1+e^n/n!} \to 1$; inoltre $1+3/2n \to 1$

per cui $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$

Applicando Cesàro all'ultimo limite abbiamo

$$\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \boxed{\frac{1}{2e}}.$$

(b) Se $a_n = \sqrt[5]{n^5 + 10n^4 - 8n^3 + 15n^2 + n - 1} - n =$

$$n\left(1 + \frac{10}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/5} - n =$$

$$n\left(1 + \frac{1}{5}\left(\frac{10}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{10}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - n =$$

$$n\left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2 + o(1) \to \boxed{2}$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2\sin^2(x)} \cos(2x) - 1}{(1-\cos(x))^2}$. Uso Taylor

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2$$

$$= x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$e^{2\sin^2(x)} = e^{2x^2-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)} =$$

$$1+2x^2-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)+\frac{1}{2}\left(2x^2+o(x^2)\right)^2+o\left(O(x^2)^2\right) =$$

$$1+2x^2-\frac{2}{3}x^4+2x^4+o(x^4) = 1+2x^2+\frac{4}{3}x^4+o(x^4)$$

$$\cos(2x) = 1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^2}{24}+o(x^4) = 1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$$

$$\Rightarrow e^{2\sin^2(x)}\cos(2x) = \left(1+2x^2+\frac{4}{3}x^4+o(x^4)\right)\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)$$

$$= 1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+2x^2-4x^4+\frac{4}{3}x^4+o(x^4) =$$

$$\boxed{1-2x^4+o(x^4)}.$$

Infine $(1-\cos(x))^2 = \left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+1\right)^2 = \frac{x^4}{4}\left(1+o(1)\right)^2 =$ $\boxed{\frac{x^4}{4}+o(x^4)}$ e quindi

$$\frac{e^{2\sin^2(x)}\cos(2x)-1}{(1-\cos(x))^2} = \frac{-2x^4+o(x^4)}{\frac{1}{4}x^4+o(x^4)} \to -2\cdot 4 = \boxed{8}$$

(7) (a) $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{1+n^2}$. La successione

a_n è somma di due "pezzi": $a_n = b_n + c_n$ dove

$b_n = (-1)^n\frac{n}{1+n^2}$ $\quad c_n = \frac{1}{1+n^2}$. Noto che $c_n \geq 0$

Dato che $c_n \simeq \frac{1}{n^2}$ è chiaro che $\sum_n c_n$ converge (assoluta-

mente essendo $c_n \geq 0$). Al contrario $|b_n| \simeq \frac{1}{n}$ da cui

$\sum_n |b_n| = +\infty$, e quindi $\sum_n b_n$ non è ass. conv.

Ne segue che la somma $\sum_n a_n$ non è ass. conv.

Però $\frac{n}{1+n^2}$ è decrescente e quindi $\sum_n b_n$ converge per Leibniz. In definitiva $\sum_n a_n$ converge, ma non converge assolutamente.

(b). $a_n = \dfrac{n+\cos(n)}{1+n^2} = b_n + c_n$ dove

$b_n = \frac{n}{1+n^2}$ $\quad c_n = \frac{\cos(n)}{1+n^2}$. Dato che $|c_n| \leq \frac{1}{1+n^2}$ si ha che $\sum_n c_n$ è ass. conv. Viceversa $b_n \geq 0$ e $b_n \simeq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_n b_n$ diverge. Ne segue che la serie somma $\sum_n a_n$ è divergente.

(8) $\quad y'' + 2y' + y = e^{-x} \qquad y'(0) = y(0) = 0$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ che ha la radice doppia $z = -1$. Dunque le soluzioni dell'omogenea sono

$$y_0(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

Cerchiamo una sol. particolare del tipo $\bar{y}(x) = cx^2e^{-x}$ (nota che sia xe^{-x} e e^{-x} sono sol. dell'omogenea). Allora

$\bar{y}'(x) = (2cx - cx^2)e^{-x} \qquad \bar{y}''(x) = (2c - 4cx + cx^2)e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = c\left[2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2\right]e^{-x}$$

$$= 2c\,e^{-x}$$ DUNQUE PRENDO $c = 1/2$

e la sol. generale dell'equazione è

$$y(x) = A e^{-x} + B x e^{-x} + \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

Imponendo $y(0) = 0$ trovo $A = 0$.. Allora

$$y'(x) = B e^{-x} - B x e^{-x} + x e^{-x} - \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

che, imponendo $y'(0)=0$, implica $B = 0$. Dunque

$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x}}$$

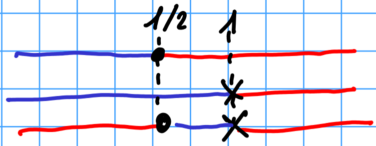
(g) $$f(x) = e^{x+1}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$$

DOMINIO $\{x \neq 1\}$

LIMITI

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) \left(= e^{-\infty} \cdot \frac{2}{1}\right) = \boxed{0}$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) \left(= e^{2} \frac{1}{0^-}\right) = \boxed{-\infty}$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) \left(= e^{2} \frac{1}{0^+}\right) = \boxed{+\infty}$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) \left(= e^{+\infty} \frac{2}{1}\right) = \boxed{+\infty}$

ZERI E SEGNO : dipendono solo da $\frac{2x-1}{x-1}$



$f(x)=0 \iff x = 1/2$

$f(x)>0 \iff x>1$ oppure $x<\frac{1}{2}$

$f(x)<0 \iff \frac{1}{2} < x < 1$

DERIVATA E MONOTONIA

$$f'(x) = e^{x+1}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) + e^{x+1}\,\frac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{e^{x+1}}{(x-1)^2}\Big((2x-1)(x-1) + 2x-2-2x+1\Big) =$$

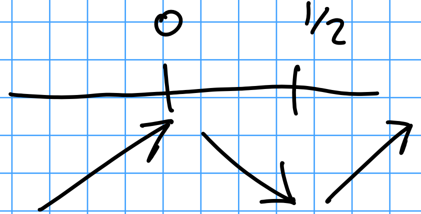
$$\frac{e^{x+1}}{(x-1)^2}\left(2x^2-3x\right)$$

POSITIVO

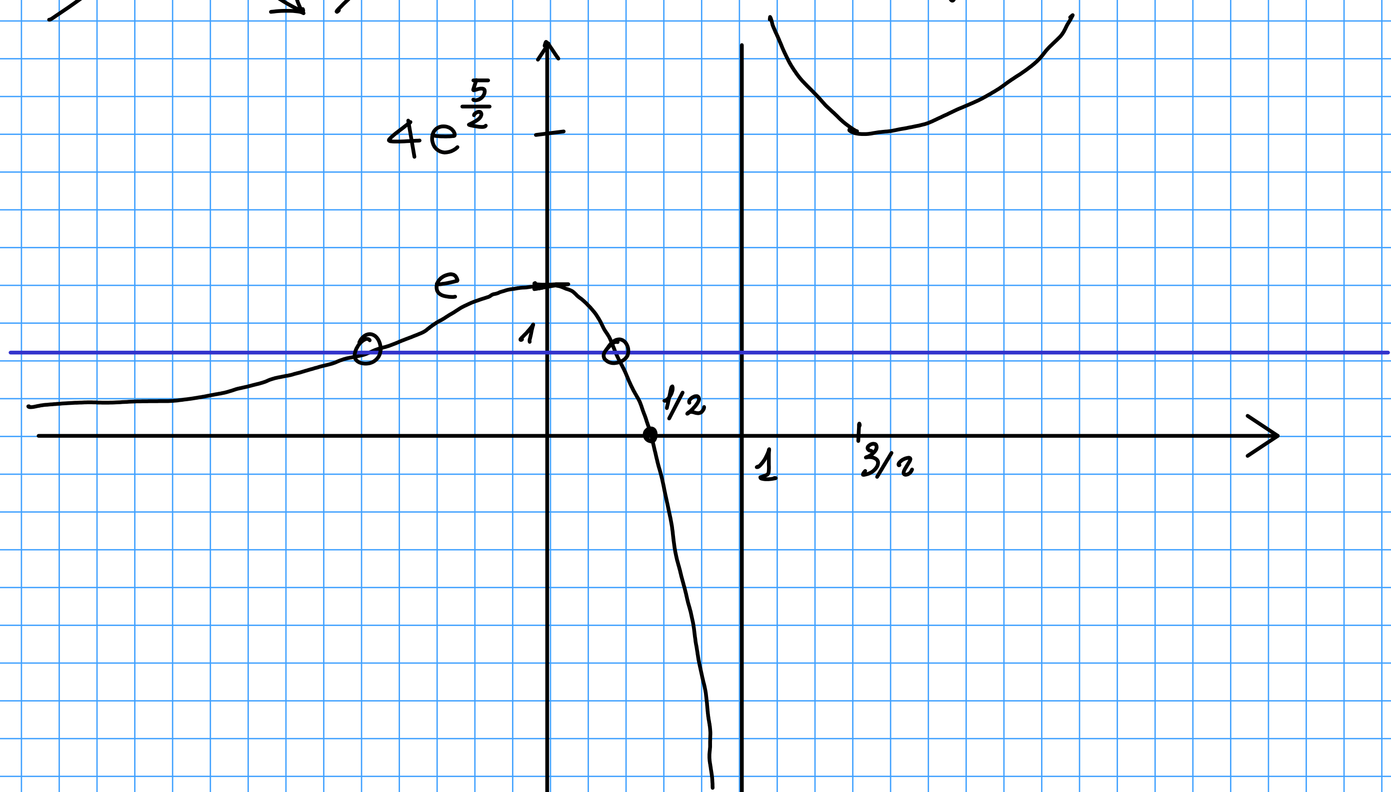
DETERMINA IL SEGNO

Dato che $2x^2-x = x(2x-1)$

- >0 se $x<0$ o $x>\frac{3}{2}$
- $=0$ se $x=0$ o $x=\frac{3}{2}$
- <0 se $0<x<\frac{3}{2}$



f ha un grafico come segue:



In effetti $f(0) = e$, mentre $f(\frac{3}{2}) = 4e^{\frac{5}{2}}$ $(> e)$

Dato che $0 < 1 < e$, l'equazione $f(x) = 1$ $\boxed{\text{ha 2 sol.}}$

(10) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx = (*)$. Facciamo una sostituzione

$t = e^x \iff x = \ln(t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$; dunque

$$(*) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\frac{dt}{t} = (**) \quad \left(\begin{array}{l} \text{se } x=0 \Rightarrow t=1 \\ \text{se } x=+\infty \Rightarrow t=+\infty \end{array}\right)$$

Ora sostituisco $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} = s \iff \frac{t-1}{t+1} = s^2 \iff t-1 = s^2t + s^2$

$$\iff t = \frac{1+s^2}{1-s^2} \Rightarrow dt = \frac{2s(1-s^2)+2s(1+s^2)}{(1-s^2)^2}\,ds = \frac{4s\,ds}{(1-s^2)^2}$$

$\Downarrow$

$$(**) = \int_0^1 \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^2 s\,\frac{4s\,ds}{(1-s^2)^2} = \int_0^1 \frac{4s^2\,ds}{(1+s^2)^2} = (***)$$

Faccio questo integrale per parti, notando che

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{1+s^2} = \frac{-2s}{(1+s^2)^2} \quad \text{e quindi}$$

$$(***) = -2\int_0^1 s\,\frac{d}{ds}\frac{1}{1+s^2}\,ds = -2\left[\frac{s}{1+s^2}\right]_0^1 +$$

$$2\int_0^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = -\frac{2}{2} + 2\left[\arctan(s)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$$