.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 9 settembre 2011.

1. Si riporti la definizione di $f'(1) = 0$ (4 p.).
2. Si scriva l'enunciato del teorema di Lagrange (4 p.).
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n! + 4n^n}}{3n+2} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\sqrt[5]{n^5 + 3n^3 + n^2 + 1} - n^2$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}}\cos(x) - 1}{(1-\cos(x))^2}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := (x^2 + 2x - 2)e^{\frac{4}{x}}$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni positive ($x > 0$) ha l'equazione $f(x) = 7e^2$ (2 punti) – per questo ultimo punto si può dare per buono che $\sqrt{7} < e$.

---

6. Si scriva la formula di integrazione per parti (punti 4).
7. Si scriva l'enunciato del criterio della radice per le serie (punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(n) + 1}{1+n^3} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n) + n^2}{1+n^3}$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' + 2y' + y = 4xe^x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_0^{+\infty} \frac{3e^x + 2}{e^{2x} + 2e^x + 2}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 9 SETTEMBRE 2011

Cognome:

Nome:

Matricola:

voto

PRIMA PARTE

1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$$

OPPURE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$$

2.

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$, allora esiste x in $]a,b[$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x)$

3. (a) $1/3$ (b) $3/5$

4. $-1/3$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

SECONDA PARTE

6. Se f e g sono continue su $[a,b]$, se F è primitiva di f e G è primitiva di g allora:

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx$$

7. Se $a_n \geq 0$, se esiste $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ allora si ha:

$\ell < 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_n a_n$ CONVERGE

$\ell > 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_n a_n$ DIVERGE

8. (a) ~~AC~~ | C | NC (b) AC | C | ~~NC~~

9. $$\boxed{y(x) = (x+1)e^{-x} + (x-1)e^{x}}$$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

3) (a) $$a_n := \frac{\sqrt[n]{n! + 4n^n}}{3n+2} = \frac{n}{n}\,\frac{\sqrt[n]{n!/n^n + 4}}{3+2/n} = \frac{\sqrt[n]{4}\,\sqrt[n]{1+n!/4n^n}}{3+2/n}$$

Ricordiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n!/4n^n} = 1$$ e quindi $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$$

(b) $$a_n := n\sqrt[5]{n^5+3n^3+n^2+1} - n^2 =$$

$$n^2\sqrt[5]{1+3/n^2+1/n^3+1/n^5} - n^2 = n^2\left[\left(1+\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{5}} - 1\right] =$$

$$n^2\left[\cancel{1} + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o\left(\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \cancel{1}\right] =$$

$$n^2\left[\frac{3}{5}\,\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{3}{5} + o(1) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{5}$$

(4)

Usando Taylor:

$$e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

DUNQUE

$$e^{x^2/2}\cos(x) = \left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) =$$

$$1+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)-\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)+\frac{x^4}{24}+o(x^4) =$$

$$1-\frac{x^4}{12}+o(x^4).$$

INOLTRE

$$(1-\cos(x))^2 = \left(1-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2 = \frac{x^4}{4}(1+o(1))^2 = \frac{x^4}{4}+o(x^4)$$

IN DEFINITIVA

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}\cos(x)-1}{(1-\cos(x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^4}{12}+o(x^4)-1}{\frac{x^4}{4}+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{\frac{x^4}{4}+o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}$$

(5) $f(x) = (x^2+2x-2)\,e^{\frac{4}{x}}$

- DOMINIO : $\{x \neq 0\}$

- LIMITI :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = (+\infty)\cdot e^0 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = (-2)\,e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = (-2)\,e^{+\infty} = -\infty \quad ;$$

• SEGNO : DIPENDE SOLO DA x^2+2x-2, si ha

$x^2+2x-2=0 \iff x = -1 \pm \sqrt{3}$. Ne segue che

$f(x)>0 \iff x<-1-\sqrt{3}$ oppure $x>-1+\sqrt{3}$ (N.B. $-1+\sqrt{3}>0$)

• DERIVATA:

$$f'(x) = (2x+2)e^{\frac{4}{x}} + (x^2+2x-2)e^{\frac{4}{x}}\left(\frac{-4}{x^2}\right) =$$

$$e^{\frac{4}{x}}\left[2x^3+2x^2-4x^2-8x+8\right] = e^{\frac{4}{x}}(2x^3-2x^2-8x+8) =$$

$$2e^{\frac{4}{x}}\left[x^2(x-1)-4(x-1)\right] = 2e^{\frac{4}{x}}(x^2-4)(x-1) =$$

$$= 2e^{\frac{4}{x}}(x-2)(x+2)(x-1)$$

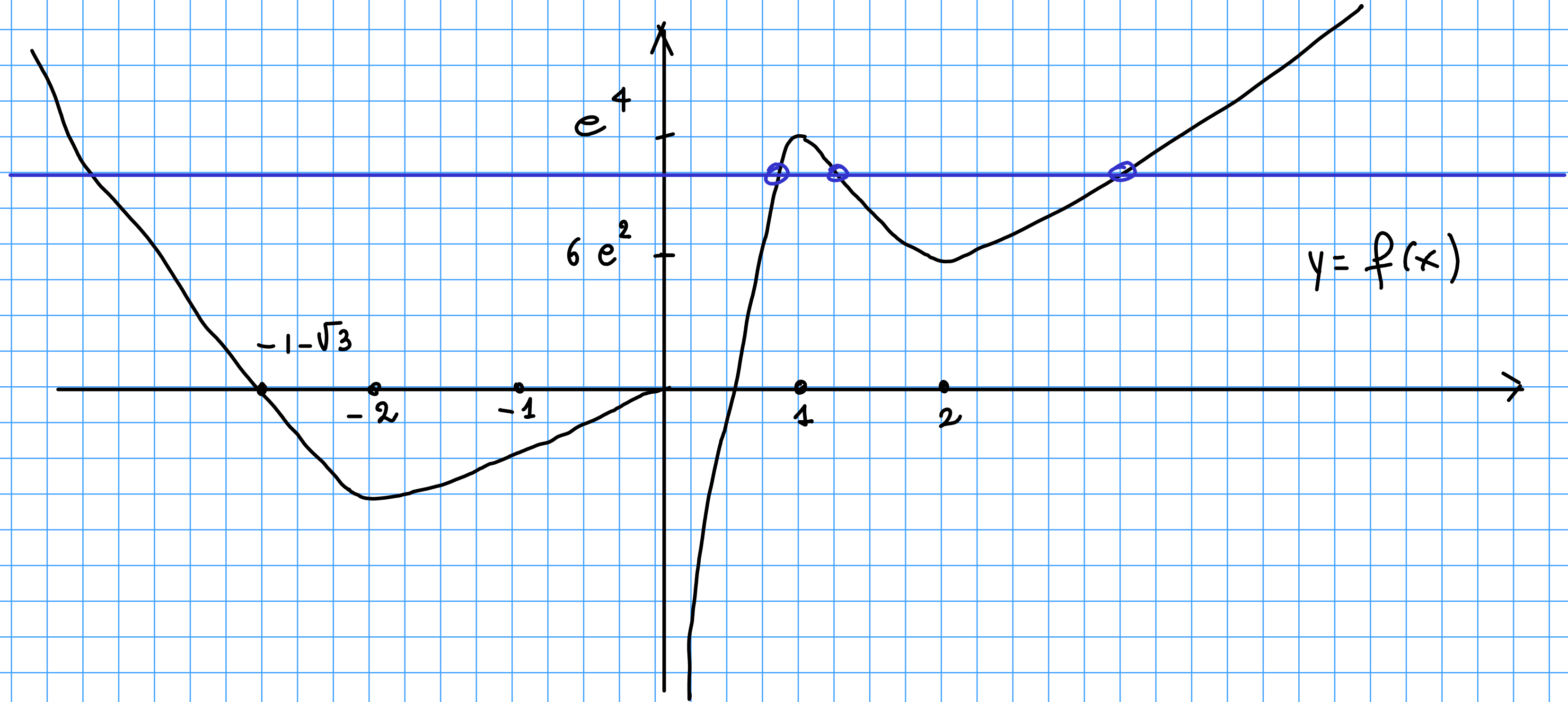
DUNQUE $f'(x)=0 \iff x=\pm 2$ o $x=1$

$f'(x)>0$ per $x>1$ e per $-2<x<2$ (escluso $x=0$)

Si ha $f(1)=e^4$, $f(2)=6e^2$, $f(-2)=\frac{-2}{e^2}$

Dato che $6<7<e^2 \Rightarrow 6e^2<7e^2<e^4$ e allora (vedi grafico)

l'equazione $f(x)=7e^2$ ha TRE SOLUZIONI POSITIVE.



(8) (a) $$a_n = \frac{n\sin(n)+1}{1+n^3} = \underbrace{\frac{n}{1+n^3}\sin(n)}_{b_n} + \underbrace{\frac{1}{1+n^3}}_{c_n}$$

Dato che $|\sin(x)| \le 1$ si ha $|b_n| \le \frac{n}{1+n^3} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_n |b_n|$ CONVERGE (perché $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge). Inoltre $0 \le c_n \le \frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum_n |c_n|$ CONVERGE.

Allora la serie delle somme $\sum a_n$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

(b) $$a_n = \frac{n\cos(n)+n^2}{1+n^3} = \underbrace{\frac{n}{1+n^3}\cos(n)}_{b_n} + \underbrace{\frac{n^2}{1+n^3}}_{c_n}$$

Come nel caso (a) la serie $\sum_n |b_n|$ conv. ($\Rightarrow \sum b_n$ CONV. ASS.)

Però $0 \leq \frac{c_n}{1/n} = \frac{\frac{n^2}{1+n^3}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^3}{1+n^3} \longrightarrow 1$, quindi $c_n \simeq \frac{1}{n}$

Per il criterio del confront $\sum_n c_n$ DIVERGE. Ne segue che la serie delle somme: $\sum_n a_n$ è DIVERGENTE (CONVERGENTE + DIVERGENTE = DIVERGENTE). In particolare

$\sum_n a_n$ NON CONVERGE

(g) $y'' + 2y' + y = 4xe^x$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 \Rightarrow$ RADICE $z=-1$ DOPPIA

$\Rightarrow$ le soluzioni dell'omogenea sono $y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione particolare della forma

$\bar{y}(x) = (C + Dx)e^x$. Allora $\bar{y}'(x) = (D + C + Dx)e^x$

$\bar{y}'' = (2D + C + Dx)e^x$. Ne segue

$\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = e^x(2D + C + Dx + 2D + 2C + 2Dx + C + Dx)$ e quindi

$$\begin{cases} 4D = 4 \\ 4D + 4C = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} D = 1 \\ C = -1. \end{array}$$

NE SEGUE CHE LA SOLUZIONE GENERALE È:

$y(x) \quad (A + Bx)e^{-x} + (x-1)e^x$. IMPONENDO $y(0) = 0 \Rightarrow A = 1$

Inoltre $y'(x) = Be^{-x} - (1 + Bx)e^{-x} + e^x + (x-1)e^x \Rightarrow$ (IMPONENDO $x=0$)

$B - 1 = 0 \Rightarrow B = 1$ IN DEFINITIVA

$$y(x) = (x+1)e^{-x} + (x-1)e^x.$$

(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3e^x + 2}{e^{2x} + 2e^x + 2}\,dx$. Usiamo la sostituzione $y = e^x$ $\Rightarrow x = \ln(y) \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{y}$

$\longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3y + 2}{(y^2 + 2y + 2)y}\,dy$. Usiamo la riduzione in fratti semplici

$$\frac{3y+2}{(y^2+2y+2)y} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+2y+2} = \frac{Ay^2+2Ay+2A+By^2+Cy}{(y^2+2y+2)y} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=3 \\ 2A=2 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1 \\ C=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

e l'integrale diventa

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y}+\frac{-y+1}{y^2+2y+2}\right)dy = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\,\frac{2y+2}{y^2+2y+2}+\frac{2}{y^2+2y+2}\right)dy$$

$$= \left[\ln\left|\frac{y}{\sqrt{y^2+2y+2}}\right|\right]_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty}\frac{dy}{(y+1)^2+1} =$$

$$-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\left[\arctan(y+1)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln(5)+2\,\frac{\pi}{2}-2\arctan(2) =$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln(5)+\pi-2\arctan(2)}$$