Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 25 luglio 2011.

1. Si riporti la definizione di $f'(0) = 1$ (4 p.).
2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 – indichiamolo con $P_3(x)$ – per la funzione $f(x) = \ln(1 + x)$ nel punto $x_0 = 0$.
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n! + n^n}}{5n + 4} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\sqrt[4]{n^4 + 3n^2 + 1} - n^2$$
4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2}\cos(2x) - 1}{\sin(x)(\sin(x) - x)}$$
5. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) := 2x + \ln(|x^2 - 2x - 2|) - 2\ln(|x|)$$
determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni positive ($x > 0$) ha l'equazione $f(x) = 4$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del teorema fondamentale dal calcolo integrale (punti 4).
7. Data una successione $\{a_n\}$ si dica cosa significa che la serie degli a_n è convergente (punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1 + n!}{1 + n^n - 11^n} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\sqrt[n]{11} - 1\right)$$
9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)
$$y'' + 2y' + y = \sin(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$
10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).
$$\int_0^{+\infty} \frac{2e^x + 5}{e^{2x} + 4e^x + 5}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 25 LUGLIO 2011

Cognome:

Nome:

Matricola:

voto

PRIMA PARTE

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

2. $$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

3. (a) 1/5 (b) 3/4

4. 8

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

SECONDA PARTE

6. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f (cioè se $F' = f$) allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

7. La serie degli a_n è convergente se esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + \dots + a_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

8. (a) ~~AC~~ | C | NC   (b) AC | ~~C~~ | NC

9. $\boxed{y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{x}{2} e^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x)}$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

3) a) $$\frac{\sqrt[n]{n!+n^n}}{5n+4} = \frac{\sqrt[n]{n^n\left(\frac{n!}{n^n}+1\right)}}{5n\left(1+\frac{4}{5n}\right)} = \frac{\cancel{n}\sqrt[n]{1+\frac{n!}{n^n}}}{5\cancel{n}\left(1+\frac{4}{5n}\right)} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{5}}$$

perché $\frac{n!}{n^n} \to 0 \Rightarrow \sqrt{1+\frac{n!}{n^n}} \to 1$ e $\frac{4}{5n} \to 0$

b) $$n\sqrt[4]{n^4+3n^2+1} - n^2 = n\left[n^4\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)\right]^{1/4} - n^2 = n^2\left[\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)^{1/4} - 1\right] =$$

$$= n^2\left[\cancel{1} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right) + o\left(\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right) - \cancel{1}\right] = n^2\left[\frac{3}{4}\,\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] =$$

$$\frac{3}{4} + o(1) \longrightarrow \boxed{\frac{3}{4}}$$

4) $$e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2}(2x^2)^2 + o\left((2x^2)^2\right) = 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o\left((2x)^4\right) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow e^{2x^2}\cos(2x) = \left(1+2x^2+2x^4+o(x^4)\right)\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right) =$$

$$1 + \cancel{2x^2} + 2x^4 + o(x^4) - \cancel{2x^2} - 4x^4 + o(x^4) + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) =$$

$$1 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies$$

$$\sin(x)(\sin(x) - x) = (x + o(x))\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x}\right) =$$

$$(x + o(x))\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\implies \frac{e^{2x^2}\cos(x) - 1}{\sin(x)(\sin(x) - x)} = \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)} \to \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{1}{6}} = \boxed{8}$$

8) (a) Prendiamo $a_n = (-1)^n \dfrac{1 + n!}{1 + n^n - 11^n}$. Si ha:

$$|a_n| = \frac{1 + n!}{1 + n^n - 11^n} = \frac{n!}{n^n}\left(\frac{1 + 1/n!}{1 + \frac{1}{n^n} - \frac{11^n}{n^n}}\right) \simeq \frac{n!}{n^n} (=: b_n),$$ perché $1/n! \to 0$, $\dfrac{1}{n^n} \to 0$ e $\dfrac{11^n}{n^n} \to 0$

Se applichiamo a b_n il criterio del rapporto troviamo:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

Dunque $\sum_n b_n$ converge e per confronto $\sum_n |a_n|$ conv. $\implies \sum_n a_n$ conv. ass.

(b) $\sqrt[n]{11} = 11^{1/n} = e^{\frac{\ln(11)}{n}} \simeq 1 + \frac{\ln(11)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ e quindi

se $a_n = (-1)^n\left(\sqrt[n]{11}-1\right)$, allora $|a_n| \simeq \frac{\ln(11)}{n}$. Dato che $\sum_n \frac{1}{n}$ NON È CONV. $\Rightarrow \sum_n |a_n|$ NON È CONV. Però $|a_n|$ è decrescente rispetto a n (si vede facilmente) $\Rightarrow \sum_n a_n = \sum_n (-1)^n |a_n|$ è convergente per Leibniz.

(g)

$$y'' + 2y' + y = \sin(x)$$

Considero l'omogenea: $y'' + 2y' + y$. Il pol. caratteristico è $P(z) = z^2+2z+1 = (z+1)^2$ che ha solo la radice $z=-1$, doppia. Dunque le sol. dell'om. sono $y_0(x) = A e^{-x} + Bx e^{-x}$.

Cerchiamo una sol. particolare del tipo $C\sin(x) + D\cos(x)$.

Si ha:
$$\left.\begin{aligned} \bar{y}(x) &= C\sin(x) + D\cos(x) \\ \bar{y}'(x) &= C\cos(x) - D\sin(x) \\ \bar{y}''(x) &= -C\sin(x) - D\cos(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = \\ &(-C - 2D + C)\sin(x) + \\ &(-D + 2C + D)\cos(x) = \\ &-2D\sin(x) + 2C\cos(x) \end{aligned}$$

Dunque possiamo prendere $C=0$ e $D=-\frac{1}{2}$. Allora la soluzione generale è

$$y(x) = A e^{-x} + Bx e^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x) \Rightarrow y(0) = A - 1/2 \Rightarrow A = 1/2$$

$$y'(x) = -A e^{-x} + B e^{-x} - Bx e^{-x} + \frac{1}{2}\sin(x) =$$

$$(-A+B)e^{-x} - bxe^{-x} + \frac{1}{2}\sin(x) \Rightarrow y'(0) = -A+B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

IN DEFINITIVA $y(x) = \boxed{\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{x}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x)}$

(10) $$\int_0^{+\infty} \frac{2e^x+5}{e^{2x}+4e^x+5}\,dx$$ sostituiamo $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{y}$

$$\| $$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2y+5}{y(y^2+4y+5)}\,dy.$$ Cerchiamo la riduzione in fratti semplici:

$$\frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+4y+5} = \frac{Ay^2+4Ay+5A+By^2+Cy}{y(y^2+4y+5)} =$$

$$\frac{(A+B)y^2+(4A+C)y+5A}{y(y^2+4y+5)} = \frac{2y+5}{y(y^2+4y+5)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+C=2 \\ 5A=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-2 \end{cases}$$ dunque $$\frac{2y+5}{y(y^2+4y+5)} = \frac{1}{y} - \frac{y+2}{y^2+4y+5}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y}-\frac{y+2}{y^2+4y+5}\right)dy = \lim_{c\to+\infty}\left(\int_1^c \frac{dy}{y} - \int_1^c \frac{y+2}{y^2+4y+5}\,dy\right) =$$

$$\lim_{c\to+\infty}\left(\int_1^c \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int_1^c \frac{2y+4}{y^2+4y+5}\,dy\right) = \lim_{c\to\infty}\Big[\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y^2+4y+5|\Big]_1^c =$$

$$\lim_{c\to\infty} \underbrace{\ln\frac{c}{\sqrt{c^2+4c+5}}}_{0} - \underbrace{\ln(1)}_{0} + \frac{1}{2}\ln(1+4+5) = \frac{1}{2}\ln(10) = \boxed{\ln(\sqrt{10})}$$

(5)

$$f(x) = 2x + \ln|x^2-2x-2| - 2\ln|x|$$

<u>DOMINIO</u> $x \neq 0$; $x^2-2x-2 \neq 0$ cioè $x \neq 1\pm\sqrt{3}$

<u>LIMITI</u> • $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ← IN ENTRAMBI I CASI x "VINCE SUI LOGARITMI":

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(|x|)}{x} = 0 \; , \; \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(x^2-2x-2)}{x} = 0\right)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1\pm\sqrt{3}} f(x) = -\infty$ (perché $y\to 0 \Rightarrow \ln|y| \to -\infty$)

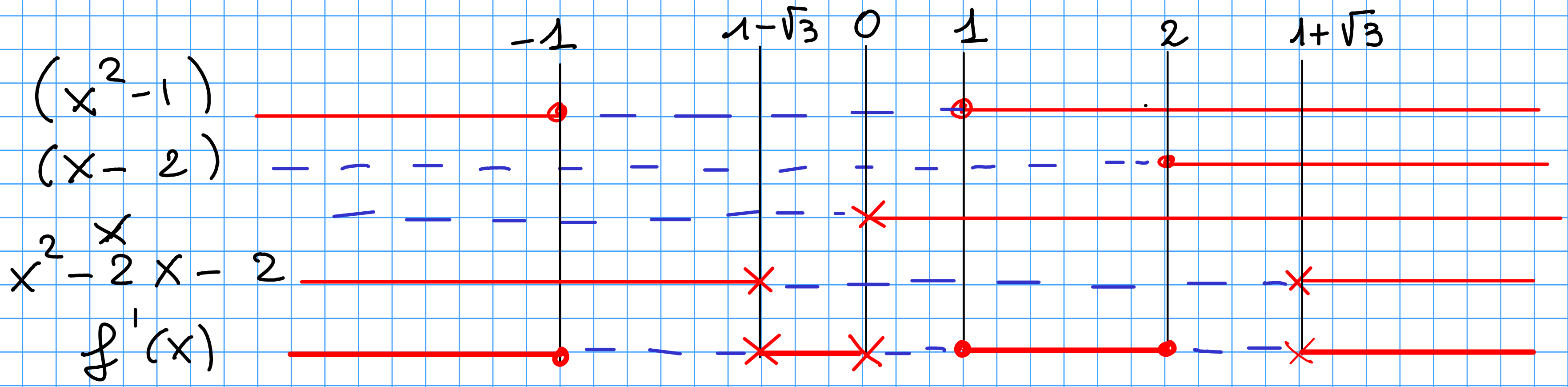
<u>SEGNO</u> Non è evidente: lasciamo perdere.

DERIVATA E MONOTONIA

$$f'(x) = 2 + \frac{2x-2}{x^2-2x-2} - \frac{2}{x} = \frac{2x(x^2-2x-2)+x(2x-2)-2(x^2-2x-2)}{x(x^2-2x-2)} =$$

$$\frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x(x^2-2x-2)} = 2\,\frac{x^2(x-2)-(x-2)}{x(x^2-2x-2)} = \frac{2(x^2-1)(x-2)}{x(x^2-2x-2)}$$

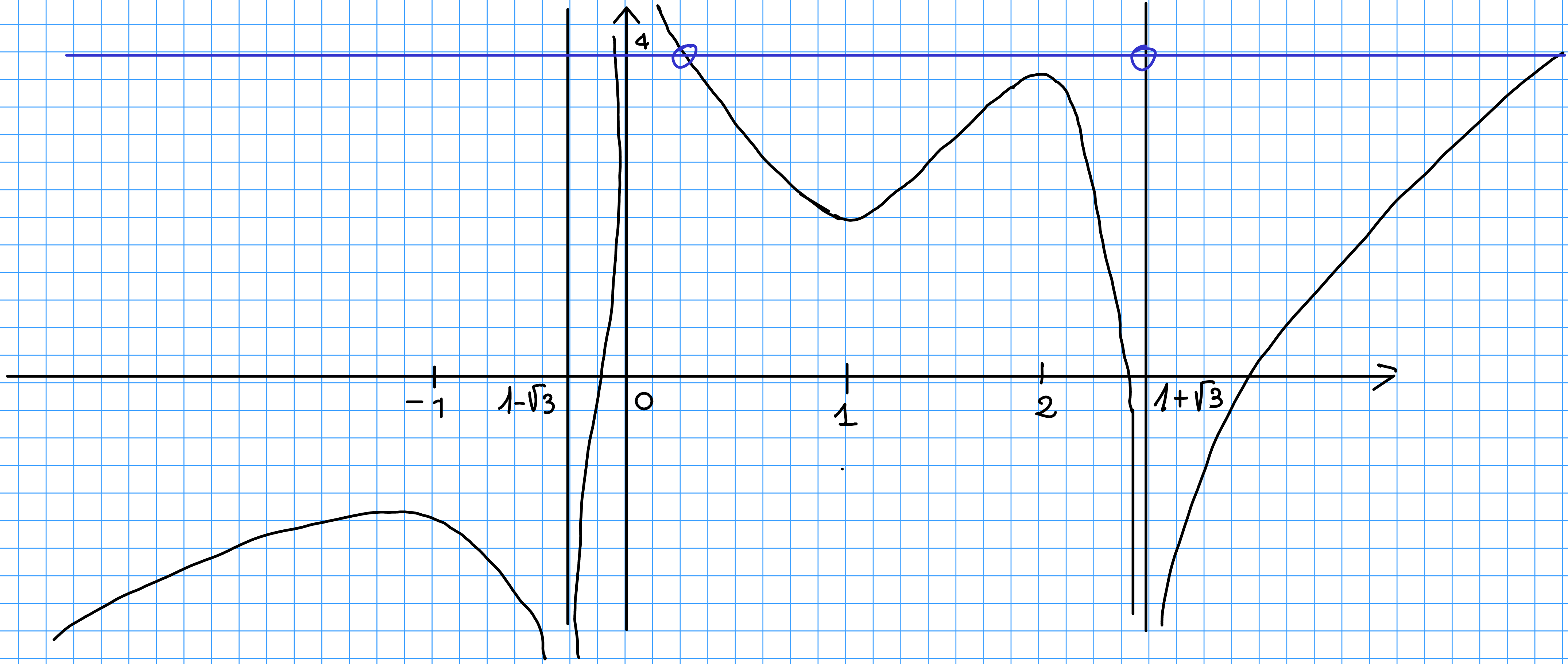
DUNQUE $f'(x)=0 \iff x=\pm 1$ oppure $x=2$. Vediamo il segno di $f'(x)$ esaminando il segno di ogni fattore



DUNQUE $x=-1$ e $x=2$ sono max rel e $x=1$ è min. rel.

Si ha $f(-1) = -2$, $f(1) = 2+\ln(3)$, $f(2) = 4-\ln(2)$

da cui il seguente grafico:



Dato che $4 > f(2)$ l'equazione $y(x) = 4$ HA $\boxed{2}$ RADICI MAGGIORI DI ZERO