Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 11 luglio 2011 - fila A.

1. Si riporti la definizione di $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$.
2. Si riporti l'enunciato del teorema di de l'Hôspital, per le forme del tipo 0/0.
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n! + 3^n}}{2n+4} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\sqrt[3]{n^3+3n+1} - n^2$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sqrt{1-4x+3x^2}-1}{\sin^2(x)}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{2}{x} + \ln(|2x^2+2x-1|)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 2$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del criterio del rapporto per le serie (punti 4).
7. Si scriva la formula risolutiva per l'equazione differenziale $y' = a(x)y+b(x)$ con condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ (punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{10^n+n!} \quad , \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' - 2y' + y = e^{3x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x+2}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 11 luglio 2011 - fila B.

1. Si riporti l'enunciato del teorema di de l'Hôspital, per le forme del tipo 0/0.

2. Si riporti la definizione di $\lim_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\sqrt[3]{n^3+2n+1} - n^2 \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!+4^n}}{3n+4}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sqrt{1-4x+4x^2}-1}{\sin^2(x)}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{2}{x} + \ln(|2x^2+2x-1|)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 2$ (2 punti).

---

6. Si scriva la formula risolutiva per l'equazione differenziale $y' = a(x)y+b(x)$ con condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ (punti 4).

7. Si scriva l'enunciato del criterio del rapporto per le serie (punti 4).

8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right) \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{10^n+n!}$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y''-2y'+y=e^{4x}, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x+2}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 11 luglio 2011 - fila C.

1. Si riporti la definizione di $\lim_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$.

2. Si riporti l'enunciato del teorema di de l'Hôspital, per le forme del tipo 0/0.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n! + 5^n}}{5n+4} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\sqrt[3]{n^3+6n+1} - n^2$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sqrt{1-4x+5x^2}-1}{\sin^2(x)}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{2}{x} + \ln(|2x^2+2x-1|)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 2$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del criterio del rapporto per le serie (punti 4).

7. Si scriva la formula risolutiva per l'equazione differenziale $y' = a(x)y + b(x)$ con condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ (punti 4).

8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6^n}{10^n + n!} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{5} - 1\right)$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' - 2y' + y = e^{5x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x + 2}{e^{2x} + 2e^x + 2}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 11 luglio 2011 - fila D.

1. Si riporti l'enunciato del teorema di de l'Hôspital, per le forme del tipo 0/0.
2. Si riporti la definizione di $\lim_{x\to 6^-} f(x) = +\infty$.
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\sqrt[3]{n^3+4n+1} - n^2 \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!+6^n}}{4n+4}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sqrt{1-4x+6x^2}-1}{\sin^2(x)}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{2}{x} + \ln(|2x^2+2x-1|)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 2$ (2 punti).

---

6. Si scriva la formula risolutiva per l'equazione differenziale $y' = a(x)y + b(x)$ con condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ (punti 4).
7. Si scriva l'enunciato del criterio del rapporto per le serie (punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{4}-1\right) \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{10^n+n!}$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' - 2y' + y = e^{6x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x+2}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DELL'11 LUGLIO 2011

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

PRIMA PARTE

1. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ se e solo se

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

se $3 - \delta < x < 3$ si ha $f(x) > M$

2.

Siano f e g definite in un intorno U di x_0 (a valori reali) e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.
Siano f e g derivabili per $x \neq x_0$ e supponiamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, per $l \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

3. (a) $1/2e$ (b) 1

4. $-\frac{5}{2}$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

SECONDA PARTE

6. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$.
Allora se $\ell < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge; se $\ell > 1$, la serie $\sum_n a_n$ diverge.

7. Posto $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$ la soluzione è

$$y(x) = e^{A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,dt\right)$$

8. (a) ~~AC~~ | C | NC   (b) AC | ~~C~~ | NC

9. $y(x) = (e^{3x} - e^{x} - 2x e^{x})/4$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DELL'11 LUGLIO 2011

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

PRIMA PARTE

1. Siano f e g definite in un intorno U di x_0 (a valori reali) e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Siano f e g derivabili per $x \neq x_0$ e supponiamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, per $l \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

2. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ se e solo se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che se $3 - \delta < x < 3$ si ha $f(x) > M$

3. (a) $2/3$ (b) $1/3e$

4. -2

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

SECONDA PARTE

6. Posto $A(x)=\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$ la soluzione è

$$y(x)=e^{A(x)}\left(y_0+\int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\,b(t)\,dt\right)$$

7. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi tale che $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$.

Allora se $\ell<1$ la serie $\sum_n a_n$ converge; se $\ell>1$, la serie $\sum_n a_n$ diverge.

8. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC

9. $y(x)=\left(e^{4x}-e^{x}-3xe^{x}\right)/9$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DELL'11 LUGLIO 2011

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

PRIMA PARTE

1. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ se e solo se

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

se $3 - \delta < x < 3$ si ha $f(x) > M$

2. Siano f e g definite in un intorno U di x_0 (a valori reali) e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Siano f e g derivabili per $x \neq x_0$ e supponiamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, per $\ell \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

3. (a) $1/5e$ (b) 2

4. $-3/2$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

SECONDA PARTE

6. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$.

Allora se $\ell < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge; se $\ell > 1$, la serie $\sum_n a_n$ diverge.

7. Posto $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$ la soluzione è

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,dt \right)$$

8. (a) ~~AC~~ | C | NC   (b) AC | ~~C~~ | NC

9. $y(x) = \left(e^{5x} - e^{x} - 4x e^{x}\right)/16$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DELL'11 LUGLIO 2011

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

PRIMA PARTE

1. Siano f e g definite in un intorno U di x_0 (a valori reali) e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Siano f e g derivabili per $x \neq x_0$ e supponiamo che $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, per $l \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

2. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ se e solo se

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

se $3-\delta < x < 3$ si ha $f(x) > M$.

3. (a) $4/3$ (b) $1/4e$

4. -1

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

SECONDA PARTE

6. Posto $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$ la soluzione è

$$y(x) = e^{A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,dt\right)$$

7. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$.

Allora se $\ell < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge; se $\ell > 1$, la serie $\sum_n a_n$ diverge.

8. (a) AC $\cancel{\text{C}}$ NC (b) $\cancel{\text{AC}}$ C NC

9. $y(x) = \left(e^{6x} - e^{x} - 5xe^{x}\right)/25$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

3) • $$\frac{\sqrt[n]{n!+A^n}}{Bn+c} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{Bn}\,\frac{\sqrt[n]{1+A^n/n!}}{1+\,c/Bn} \simeq \frac{\sqrt[n]{n!}}{Bn}$$

perché $\frac{c}{Bn} \to 0$ e $\frac{A^n}{n!} \to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{1+A^n/n!} \to 1$

Inoltre, usando il teorema del rapporto (Cesaro) si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

per cui il limite fa $\frac{1}{Be}$

• $$n\sqrt[3]{n^3+cn+1} - n^2 = n^2\left[\left(1+\frac{c}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3} - 1\right] = n^2\left[1+\frac{c}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right]$$

$= \frac{c}{3} + o(1)$ per cui il limite fa $\frac{c}{3}$

4) • $$\sqrt{1-4x+Ax^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(-4x+Ax^2\right) - \frac{1}{8}\left(-4x+o(x)\right)^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 - 2x + \frac{A}{2}x^2 - \frac{16}{8}x^2 + o(x^2) = 1 - 2x + \left(\frac{A}{2}-2\right)x^2 + o(x^2)$$

• $$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$\bullet \quad \sin^2(x) = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$

$$\Downarrow$$

$$e^{2x}\sqrt{1-4x+Ax^2} = (1+2x+2x^2+o(x^2))\left(1-2x+\left(\frac{A}{2}-2\right)x^2+o(x^2)\right) =$$

$$1-2x+\left(\frac{A}{2}-2\right)x^2+2x-4x^2+2x^2+o(x^2) = 1+\left(\frac{A}{2}-4\right)x^2+o(x^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\sqrt{1-4x+Ax^2}-1}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{A}{2}-4\right)x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{A}{2}-4$$

5) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \ln\left(|2x^2+2x-1|\right)$

<u>DOMINIO</u> $x \neq 0$ e $|2x^2+2x-1|>0$ cioè $x\neq 0$ e $2x^2+2x-1\neq 0$

La seconda condizione equivale a $x \neq \dfrac{-1\pm\sqrt{1+2}}{2}$ cioè $x \neq \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

In definitivo il dominio è $\mathbb{R} \setminus \left\{0, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

<u>LIMITI</u> Si fa abbastanza facilmente (non ci sono forme indeterminate)

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \left(\frac{1}{x}\to 0,\ 2x^2+2x-1\to+\infty \Rightarrow \ln(|2x^2+2x-1|)\to+\infty\right)$

$\lim_{x\to\frac{-1-\sqrt{3}}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{-1+\sqrt{3}}{2}} f(x) = -\infty \quad \left(\frac{1}{x}\to \text{NUMERO},\ 2x^2+2x-1\to 0 \Rightarrow \ln(|2x^2+2x-1|)\to-\infty\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \left(\frac{1}{x} \to 0^+/0^- \quad \ln(|2x^2+2x-1|) \to \text{NUMERO} \right)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

ZERI E SEGNO : non è evidente, lasciamo perdere.

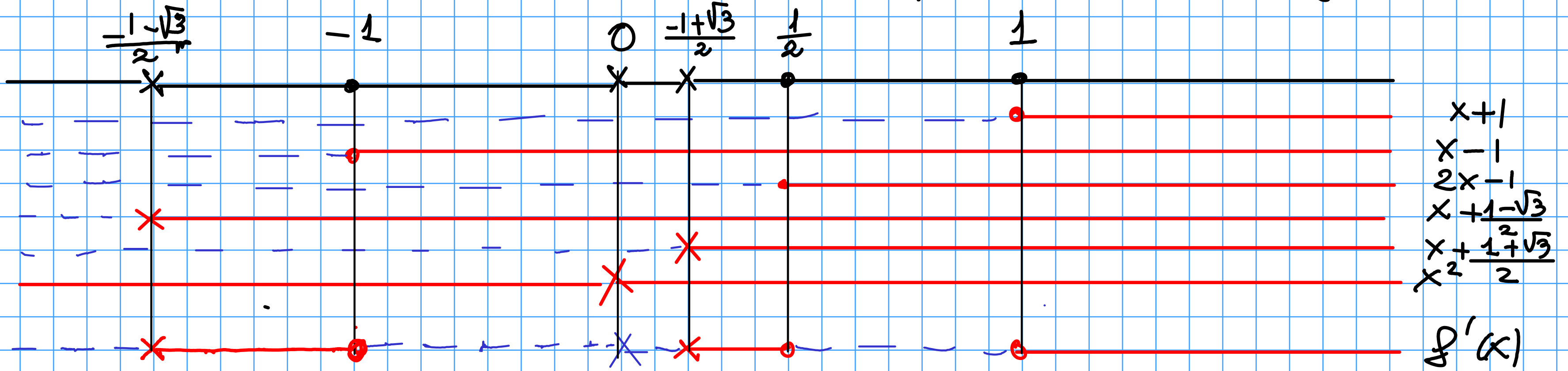
DERIVATA E MONOTONIA

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{2x^2+2x-1} = 2\,\frac{-2x^2-2x+1+x^2(2x+1)}{x^2(2x^2+2x-1)} =$$

$$= 2\,\frac{2x^3-x^2-2x+1}{x^2(2x^2+2x-1)} = 2\,\frac{x^2(2x-1)-(2x-1)}{x^2(2x^2+2x-1)} =$$

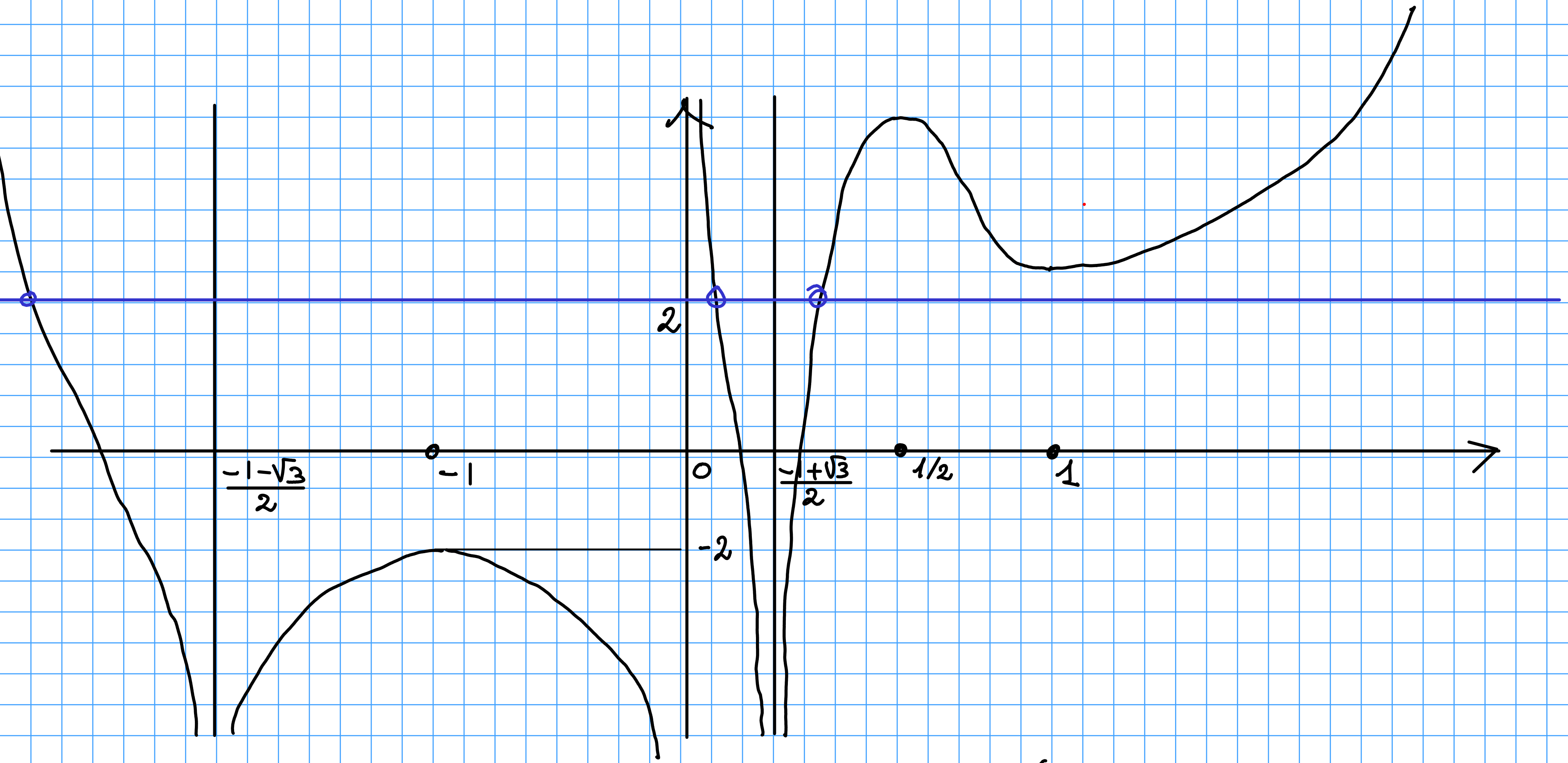
$$= \frac{2(x^2-1)(2x-1)}{2x^2\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{(x-1)(x+1)(2x-1)}{x^2\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Se ne ricava il segno di f', che è come segue



Inoltre $f(-1) = -2$, $f(1/2) = 4 - \ln(2)$, $f(1) = 2 + \ln(3) > 2$

da cui si ricava il grafico.



Dato che $f(\frac{1}{2}) > f(1) > 2$ (la seconda è ovvia - per la prima si noti che $4 - \ln(2) > 2 + \ln(3) \iff 2 > \ln(6) \iff e^2 > 6$ VERA)

si ha che l'eq. $f(x) = 2$ HA 3 SOLUZIONI

8) $\bullet \displaystyle\sum_n (-1)^n \frac{A^n}{10^n+n!}$. Posto $a_n := (-1)^n \dfrac{A^n}{10^n+n!}$ si ha $\begin{pmatrix}\text{NOTA}\\ 1<A<10\end{pmatrix}$

$$|a_n| = \frac{A^n}{10^n+n!} \simeq \frac{A^n}{n!} \quad \left(\text{perché } \frac{10^n}{n!} \to 0\right). \text{ Dato che}$$

$\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ converge (perché si sa che la sua somma è e^A - oppure applicando il criterio del rapporto)

$\Rightarrow \displaystyle\sum_n |a_n| < +\infty \Rightarrow$ la serie converge assolutamente

$\bullet \displaystyle\sum_n (-1)^n (\sqrt[n]{A}-1)$ Pongo $a_n := (-1)^n(\sqrt[n]{A}-1)$ (NOTA CHE $A>1$)

Si ha che $|a_n| = \sqrt[n]{A} - 1 = e^{\ln \sqrt[n]{A}} - 1 = e^{\frac{\ln(A)}{n}} - 1 \simeq \dfrac{\ln(A)}{n}$

Dato che $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum |a_n| = +\infty \Rightarrow$ LA SERIE NON CONV. ASS.

Peraltro si vede facilmente che $\sqrt[n]{A} - 1$ è decrescente in n e tende a zero per $n \to \infty \Rightarrow \displaystyle\sum_n (-1)^n(\sqrt[n]{A}-1)$ converge per Leibniz.

(9) $y'' - 2y' + y = e^{Ax}$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$

Il polinomio caratteristico è $z^2-2z+1=(z-1)^2$ che ha solo la radice $z=1$ DOPPIA. Dunque le soluzioni dell'omogenea sono

$$y_0(x) = \alpha e^x + \beta x e^x \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x) = \gamma e^{Ax}$ (NOTA CHE $A \neq 1$)

Si ha $\bar{y}'(x) = \gamma A e^{Ax}$ e $\bar{y}''(x) = \gamma A^2 e^{Ax} \Rightarrow$

$$\bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} = \gamma(A^2-2A+1)e^{Ax} \Rightarrow \text{(imponendo che venga } e^{Ax}\text{)}$$

$$\gamma = \frac{1}{A^2-2A+1}$$

DUNQUE $$y(x) = \frac{e^{Ax}}{A^2-2A+1} + \alpha e^x + \beta x e^x$$

Imponendo $y(0)=0$ si ha $\alpha = -\frac{1}{A^2-2A+1}$. Derivando

$$y'(x) = \frac{A}{A^2-2A+1} e^{Ax} - \frac{1}{A^2-2A+1} e^x + \beta(e^x + x e^x)$$

e imponendo $y'(0)=0 \Rightarrow$

$$\frac{A-1}{A^2-2A+1} + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{(A-1)}{(A-1)^2} = -\frac{1}{A-1}.$$ In definitiva

$$y(x) = \frac{e^{Ax} - e^{x} - (A-1)\,x\,e^{x}}{(A-1)^2}$$

(10) $$\int_0^{+\infty} \frac{e^x+2}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = (*)$$

Poniamo $e^x = y \Rightarrow x = \ln(y)$ e $dx = \frac{dy}{y}$. Ne segue

$$(*) = \int_1^{+\infty} \frac{y+2}{(y^2+2y+2)\,y}\,dy = (**)$$

Usiamo la scomposizione delle funzioni razionali

$$\frac{y+2}{(y^2+2y+2)\,y} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+2y+2}$$

(nota che y^2+2y+2 NON HA RADICI in $\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \quad Ay^2 + 2Ay + 2A + By^2 + Cy = y+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=1 \\ 2A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases} \Rightarrow (**) = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y} - \frac{y+1}{y^2+2y+2}\right)dy =$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\left[\ln|y| - \frac{1}{2}\ln(y^2+2y+2)\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty}\left[\ln\frac{y}{\sqrt{y^2+2y+2}}\right]_1^c =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \ln\frac{c}{\sqrt{c^2+2c+2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{5}} = 0 + \ln\sqrt{5} = \ln\sqrt{5} = \frac{\ln(5)}{2}$$