Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 27 giugno 2011 - fila A.

1. Si riporti la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

2. Si riporti l'enunciato del teorema di Fermat.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{1+3n^2}}{2n+4} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2n^2+7^n}-n^2}{n}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sqrt{1-2x+3x^2}-1}{\cos(x)-1}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{7}{x+3} + \frac{1}{4}\ln(7x^2-7x+4)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 4$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del criterio del confronto per le serie (punti 4).

7. Si scriva la definizione di integrale improprio su $[0, +\infty[$ (punti 4).

8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{n^2+4^n} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' - 2y' + 2y = e^{3x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}(9x+10)}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 27 giugno 2011 - fila B.

1. Si riporti l'enunciato del teorema di Fermat.
2. Si riporti la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$.
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2n^2+2^n}-n^2}{n} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{1+4n^2}}{3n+4}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sqrt{1-2x+4x^2}-1}{\cos(x)-1}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{7}{x+3} + \frac{1}{4}\ln(7x^2-7x+4)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 4$ (2 punti).

---

6. Si scriva la definizione di integrale improprio su $[0, +\infty[$ (punti 4).
7. Si scriva l'enunciato del criterio del confronto per le serie (punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan^2\left(\frac{4}{n}\right) \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7^n}{n^2+7^n}$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' - 2y' + 2y = e^{4x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}(25x+26)}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 27 giugno 2011 - fila C.

1. Si riporti la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 7$.
2. Si riporti l'enunciato del teorema di Fermat.
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{1+7n^2}}{4n+4} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2n^2+3^n}-n^2}{n}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sqrt{1-2x+7x^2}-1}{\cos(x)-1}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{7}{x+3} + \frac{1}{4}\ln(7x^2-7x+4)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 4$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del criterio del confronto per le serie (punti 4).
7. Si scriva la definizione di integrale improprio su $[0, +\infty[$ (punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n^2+2^n} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan^2\left(\frac{7}{n}\right)$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' - 2y' + 2y = e^{7x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}(4x+5)}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 27 giugno 2011 - fila D.

1. Si riporti l'enunciato del teorema di Fermat.
2. Si riporti la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2n^2+4^n}-n^2}{n} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{1+2n^2}}{7n+4}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sqrt{1-2x+2x^2}-1}{\cos(x)-1}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{7}{x+3} + \frac{1}{4}\ln(7x^2-7x+4)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 4$ (2 punti).

---

6. Si scriva la definizione di integrale improprio su $[0, +\infty[$ (punti 4).
7. Si scriva l'enunciato del criterio del confronto per le serie (punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan^2\left(\frac{2}{n}\right) \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{n^2+3^n}$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}(16x+17)}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 28 FEBBRAIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

PRIMA PARTE

1. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

se $x < c \Rightarrow 3-\varepsilon$ $f(x) < 3+\varepsilon$

2. Se I è un intervallo di estremi a e b. Se $a < x_0 < b$. Se $f : I \to \mathbb{R}$ ha un massimo o un minimo relativo in x_0 Se f è derivabile in x_0 ALLORA

$f'(x_0) = 0$

3. (a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (b) $+\infty$

4. -1

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 28 FEBBRAIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

PRIMA PARTE

1. Se I è un intervallo di estremi a e b. Se $a < x_0 < b$. Se $f : I \to \mathbb{R}$ ho un massimo o un minimo relativo in x_0 Se f è derivabile in x_0 ALLORA

$f'(x_0) = 0$

2. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

se $x < c \Rightarrow 3 - \varepsilon \; f(x) < 3 + \varepsilon$

3. (a) $+\infty$ (b) 1

4. -2

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 28 FEBBRAIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

PRIMA PARTE

1. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

se $x < c \Rightarrow 3 - \varepsilon \quad f(x) < 3 + \varepsilon$

2. Se I è un intervallo di estremi a e b.
Se $a < x_0 < b$. Se $f : I \to \mathbb{R}$ ha un
massimo o un minimo relativo in x_0
Se f è derivabile in x_0 ALLORA

$f'(x_0) = 0$

3. (a) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$ (b) $+\infty$

4. -5

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 28 FEBBRAIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

PRIMA PARTE

1. Se I è un intervallo di estremi a e b. Se $a < x_0 < b$. Se $f: I \to \mathbb{R}$ ho un massimo o un minimo relativo in x_0. Se f è derivabile in x_0 ALLORA

$f'(x_0) = 0$

2. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

se $x < c \Rightarrow 3 - \varepsilon \quad f(x) < 3 + \varepsilon$

3. (a) $+\infty$ (b) $\frac{1+\sqrt{2}}{7}$

4. 0

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

A

SECONDA PARTE

6. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n$ (*) ALLORA.

se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

se $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge

(* BASTEREBBE DEFINITIVAMENTE)

7. Se $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è integrabile su $[0,a]$ per ogni $a>0$ e se esiste finito il limite

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)\,dx$$

, allora si dice che f è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty[$

8. (a) | AC | C | ~~NC~~ | (b) | ~~AC~~ | C | NC |

9. $\dfrac{e^{3x} - e^{x}(\cos(x) + 2\sin(x))}{5}$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

B

SECONDA PARTE

6. Se $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è integrabile su $[0,a]$ per ogni $a>0$ e se esiste finito il limite

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)\,dx ,$$

allora si dice che f è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty[$

7. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni tali che $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n$ (*) ALLORA:

se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

se $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge

(* BASTEREBBE DEFINITIVAMENTE)

8. (a) ~~AC~~ | C | NC (b) AC | C | ~~NC~~

9. $$\frac{e^{4x} - e^{x}(\cos(x) + 3\sin(x))}{10}$$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

C

SECONDA PARTE

6. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni tali che $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n$ (*) ALLORA.

se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

se $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge

(* BASTEREBBE DEFINITIVAMENTE)

7. Se $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è integrabile su $[0,a]$ per ogni $a>0$ e se esiste finito il limite

$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)\,dx$, allora si dice

che f è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty[$

8. (a) AC | C | ~~NC~~ (b) ~~AC~~ | C | NC

9. $$\frac{e^{7x} - e^{x}(\cos(x) + 6\sin(x))}{37}$$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

D

SECONDA PARTE

6. Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è integrabile su $[0, a]$ per ogni $a > 0$ e se esiste finito il limite

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)\,dx ,$$

allora si dice che f è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty[$

7. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni tali che $0 \le a_n \le b_n$ $\forall n$ (*) ALLORA:

se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

se $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge

(* BASTEREBBE DEFINITIVAMENTE)

8. (a) ~~AC~~ | C | NC   (b) AC | C | ~~NC~~

9. $$\frac{e^{2x} - e^{x}(\cos(x) + \sin(x))}{2}$$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

(3) • $\frac{\sqrt{1+2n^2+A^n}-n^2}{n} = \frac{(\sqrt{A})^n}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{A^n}+\frac{2n^2}{A^n}+1}-\frac{n}{(\sqrt{A})^n}\right] \to \boxed{+\infty}$, dato che $\frac{2n^2}{A^n} \to 0$, $\frac{1}{A^n} \to 0$

$\frac{(\sqrt{A})^n}{n} \to +\infty$

(A dipende dalla fila, ma è in ogni caso > 1)

• $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{1+An^2}}{Bn+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \frac{1+\sqrt{\frac{1}{n^2}+A}}{B+4/n} = \boxed{\frac{1+\sqrt{A}}{B}}$

(4) $\frac{e^x\sqrt{1-2x+Ax^2}-1}{\cos(x)-1} =$

$$\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left[1+\frac{1}{2}(-2x+Ax^2)-\frac{1}{8}(-2x+o(x))^2+o\left((-2x+o(x))^2\right)\right]-1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1} =$$

$$\frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}-\cancel{x}+\frac{A}{2}x^2-x^2-\frac{4x^2}{8}+o(x^2)-\cancel{1}}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{\left(\frac{A}{2}-1\right)x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \to \boxed{2-A}$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{7}{x+3} + \frac{1}{4}\ln(7x^2-7x+4)$

<u>DOMINIO</u> $x \neq -3$ e $7x^2-7x+4>0$. La seconda condizione è sempre vera dato che $\Delta = (7)^2-4\cdot4\cdot7 = 7\cdot7-16\cdot7 < 0$. DUNQUE $\{x\neq-3\}$

LIMITI $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 + \frac{1}{4}\ln(+\infty) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \frac{7}{0^-} + \frac{1}{4}\ln(\text{numero}) = -\infty$; $\lim_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$

Fuori da $x=-3$ la funzione è continua e derivabile.

SEGNO Non è evidente (l'equazione $f(x)=0$ non si risolve con metodi algebrici)
LASCIAMO STARE.

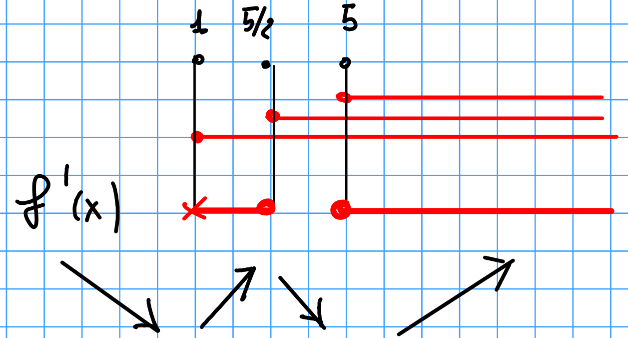
DERIVATA e monotonia. $f'(x) = \frac{-7}{(x+3)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{14x-7}{7x^2-7x+4} =$

$$\frac{-28(7x^2-7x+4)+(x^2+6x+9)(14x-7)}{4(x+3)^2(7x^2-7x+4)} = \frac{14x^3-119x^2+280x-175}{4(x+3)(7x^2-7x+4)}$$

Si vede facilmente che $x=1$ annulla il numeratore. Facendo la divisione per $(x-1)$ si ottiene allora:

$$f'(x) = \frac{7(2x-5)(x-5)(x-1)}{4(x+3)^2(7x^2-7x+4)}$$

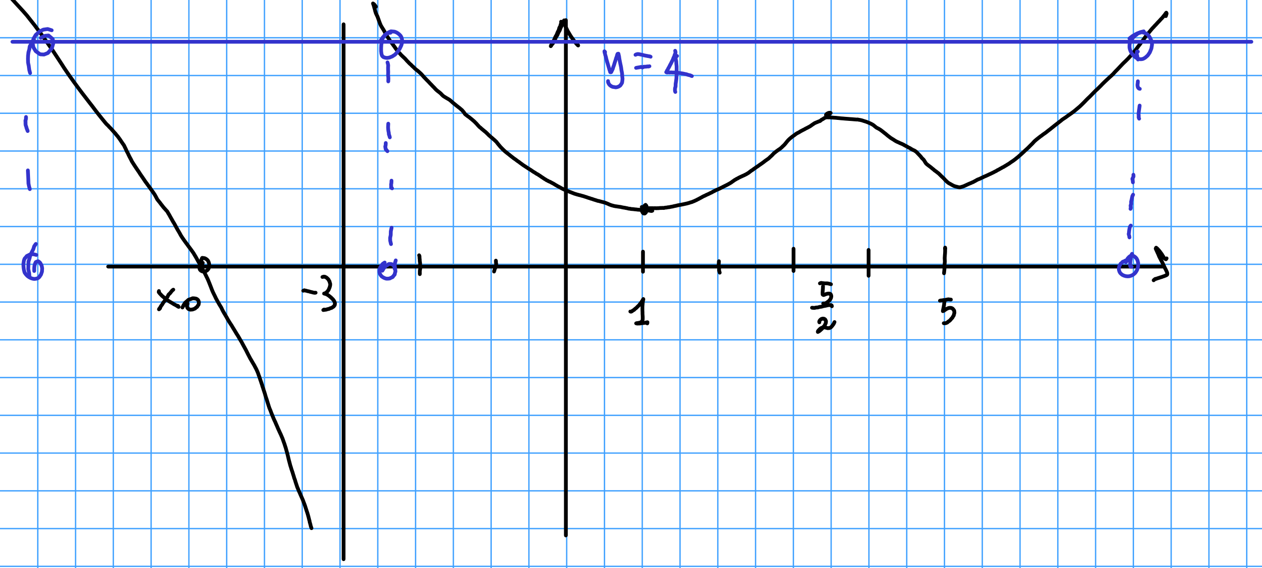
Mettendo insieme i segni dei vari fattori (del num.) si ha



e quindi (usando la monotonia)

il grafico della funzione è

come rappresentato di seguito:



Per fare il grafico è servito il calcolo di:

$$f(1) = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4) > 0$$

$$f(5/2) = \frac{14}{11} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{121}{4}\right)$$

$$f(5) = \frac{7}{8} + \frac{1}{4}\ln(144)$$

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{4}\ln(4) + \frac{1}{4}\ln(36) > f(1)$$

In particolare il segno si comporta come nel grafico (anche se non siamo in grado di dire esattamente quale sia il valore dell'UNICA radice x_0)

Dato che $\frac{121}{4} < \frac{124}{4} = 31 < 32 = 2^5 < e^5 \Rightarrow$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{14}{11} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{121}{4}\right) < \frac{14}{11} + \frac{5}{4} = \frac{56+55}{44} < 4$$

$\Rightarrow$ l'equazione $f(x) = 4$ ha tre soluzioni. (vedi grafico)

(8) • $\sum_n (-1)^n \tan\left(\frac{A}{n}\right)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE PERCHÉ

$\sum_n \tan^2\left(\frac{A}{n}\right)$ converge essendo che $\tan\left(\frac{A}{n}\right) \simeq \frac{A}{n} \Rightarrow \tan^2\left(\frac{A}{n}\right) \simeq \frac{A^2}{n^2}$ e $\sum_n \frac{A^2}{n^2} < +\infty$.

$\boxed{AC}$

- $\sum_n (-1)^n \frac{B^n}{n^2+B^n}$ NON CONVERGE perché $\frac{B^n}{1+B^n} \to 1$ da cui

$(-1)^n \frac{B^n}{n^2+B^n}$ non può tendere a zero (dunque non vale la cond. necessaria)

$\boxed{NC}$

(g) $y'' - 2y' + 2y = e^{Ax}$. Polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 2z + 2$

$\Rightarrow$ Radici di $P(z) = 0$ sono $z_{1,2} = 1 \pm i$.

Allora le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$y(x) = e^x \left(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)\right).$$

Cerchiamo una sol. dell'eq. del tipo $\bar{y}(x) = \gamma e^{Ax} \Rightarrow$

$\bar{y}'(x) = A\gamma e^{Ax}$, $\bar{y}''(x) = A^2 \gamma e^{Ax} \Rightarrow \bar{y}'' - 2\bar{y}' + 2\bar{y} = (A^2 - 2A + 2)\gamma e^{x}$

$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{A^2 - 2A + 2} \Rightarrow$ la sol. è del tipo $\frac{e^{Ax}}{A^2-2A+2} + e^x\left(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)\right)$

trovare α e β si impongono le condizioni iniziali :

$$y(x) = \gamma e^{Ax} + e^{x}(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)) \Rightarrow \gamma + \alpha = 0$$

$$y'(x) = A\gamma e^{Ax} + e^{x}((\alpha+\beta)\cos(x) + (\beta-\alpha)\sin(x)) \Rightarrow A\gamma + \alpha + \beta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\gamma = -\frac{1}{A^2-2A+2}, \quad \beta = -\alpha - A\gamma = \frac{1-A}{A^2-2A+2} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = \frac{e^{Ax} - e^{x}(\cos(x) + (A-1)\sin(x))}{A^2-2A+2}}$$

(10)
$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}\,(A^2x + A^2+1)} = \left(\text{poniamo } \sqrt{x+1} = y \Leftrightarrow x = y^2 - 1 \Leftrightarrow dx = 2y\,dy\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\cancel{y}\,dy}{\cancel{y}\,(A^2(y^2-1) + A^2+1)} = 2\int_0^{} \frac{dy}{A^2y^2+1} = \left(Ay = t \quad dy = \frac{dt}{A}\right)$$

$$= \frac{2}{A}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{A}\Big[\arctan(t)\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{A}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{A}$$