Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 28 febbraio 2011 - fila A.

1. Si riportino la definizione di massimo e minimo per una funzione e l'enunciato del teorema di Weierstrass (4p.)

2. Dati un punto x_0, una funzione f (derivabile quanto basta) definita in un intorno di x_0 e n intero si scriva la formula di Taylor con resto di Lagrange (di ordine n in x_0) (4p.).

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n - \sin(3n)}{2n^3 + 1} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 7n + 1} - n$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}(1+2x)^{1-x} - 1}{\cos(x) - 1}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{28}{x-4} - \ln(7x^2 - 7x + 4)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) + 8 = 0$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del criterio della radice per le serie (punti 4).

7. Si scriva l'enunciato del teorema della media integrale (punti 4).

8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{4}{n}\right) \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos\left(\frac{2}{n}\right) - 1\right)$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' + 2y' + 2y = 3x + 2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{x-1}{x\sqrt{4-x^2}}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 28 febbraio 2011 - fila B.

1. Dati un punto x_0, una funzione f (derivabile quanto basta) definita in un intorno di x_0 e n intero si scriva la formula di Taylor con resto di Lagrange (di ordine n in x_0) (4p.).

2. Si riportino la definizione di massimo e minimo per una funzione e l'enunciato del teorema di Weierstrass (4p.)

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+4n+1}-n \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n-\sin(2n)}{6n^3+1}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}(1-2x)^{1-x}-1}{\cos(x)-1}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{28}{x-4} - \ln(7x^2-7x+4)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x)+8=0$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del teorema della media integrale (punti 4).

7. Si scriva l'enunciato del criterio della radice per le serie (punti 4).

8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\left(\frac{6}{n}\right)-1\right), \qquad (b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{5}{n}\right).$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y''+2y'+2y=2x+6, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{x-1}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 28 febbraio 2011 - fila C.

1. Dati un punto x_0, una funzione f (derivabile quanto basta) definita in un intorno di x_0 e n intero si scriva la formula di Taylor con resto di Lagrange (di ordine n in x_0) (4p.).

2. Si riportino la definizione di massimo e minimo per una funzione e l'enunciato del teorema di Weierstrass (4p.)

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+1}-n \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n-\sin(4n)}{5n^3+1}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}(1+3x)^{1-x}-1}{\cos(x)-1}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{28}{x-4} - \ln(7x^2-7x+4)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x)+8=0$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del teorema della media integrale (punti 4).

7. Si scriva l'enunciato del criterio della radice per le serie (punti 4).

8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\left(\frac{5}{n}\right)-1\right), \qquad (b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{7}{n}\right).$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y''+2y'+2y=4x+5, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{x-1}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 28 febbraio 2011 - fila D.

1. Si riportino la definizione di massimo e minimo per una funzione e l'enunciato del teorema di Weierstrass (4p.)

2. Dati un punto x_0, una funzione f (derivabile quanto basta) definita in un intorno di x_0 e n intero si scriva la formula di Taylor con resto di Lagrange (di ordine n in x_0) (4p.).

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n-\sin(3n)}{4n^3+1} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+6n+1}-n$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}(1-3x)^{1-x}-1}{\cos(x)-1}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{28}{x-4} - \ln(7x^2-7x+4)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di estremo relativi e assoluti e si tracci un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x)+8=0$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del criterio della radice per le serie (punti 4).

7. Si scriva l'enunciato del teorema della media integrale (punti 4).

8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{5}{n}\right) \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\cos\left(\frac{4}{n}\right)-1\right)$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y''+2y'+2y=3x+4, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{x-1}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 28 FEBBRAIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: A

PRIMA PARTE

1. Se $f(x) \geq f(x_1)$ $\forall x$, allora $f(x_1)$ si dice minimo di f.
Se $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x$ allora $f(x_2)$ si dice massimo di f.
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ f ammette massimo e minimo, cioè esistono x_1 e x_2 in $[a,b]$ tali che
$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$

2. Esiste t compreso tra x_0 e x tale che
$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, dove
$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} =$
$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

3. (a) $1/2$ (b) $7/2$

4. 8

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 28 FEBBRAIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: B

PRIMA PARTE

1. Esiste t compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$, dove

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

2. Se $f(x) \geq f(x_1)$ $\forall x$, allora $f(x_1)$ si dice minimo di f.
Se $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x$ allora $f(x_2)$ si dice massimo di f.
Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ f ammette massimo e minimo, cioè esistono x_1 e x_2 in $[a,b]$ tali che
$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$

3. (a) 2 (b) 1/6

4. 0

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 28 FEBBRAIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: C

PRIMA PARTE

1. Esiste t compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$, dove

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

2. Se $f(x) \geq f(x_1)$ $\forall x$, allora $f(x_1)$ si dice minimo di f.
Se $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x$ allora $f(x_2)$ si dice massimo di f.
Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ f ammette massimo e minimo, cioè esistono x_1 e x_2 in $[a,b]$ tali che
$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$

3. (a) $3/2$ (b) $1/5$

4. 15

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 28 FEBBRAIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila: D

PRIMA PARTE

1. Se $f(x) \geq f(x_1)$ $\forall x$, allora $f(x_1)$ si dice minimo di f.
Se $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x$ allora $f(x_2)$ si dice massimo di f.
Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ f ammette massimo e minimo, cioè esistono x_1 e x_2 in $[a,b]$ tali che
$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$

2. Esiste t compreso tra x_0 e x tale che
$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, dove
$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

3. (a) 1/4 (b) 3

4. 3

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

A

SECONDA PARTE

6. Se $\{a_n\}$ è una successione tale che $a_n \geq 0$ ed esista $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ si ha:

(i) se $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE

(ii) se $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DIVERGE

7. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora:

$\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f$. Se poi f è continua esiste $t \in [a,b]$ tale che $f(t) = \int_a^b f(x)\,dx$

8. (a) AC | ~~C~~ | NC (b) ~~AC~~ | C | NC

9. $e^{-x}\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \sin(x)\right) + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

B

SECONDA PARTE

6. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile. Allora:

$\inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f$. Se poi f è continua esiste $t\in[a,b]$ tale che $f(t)=\int_a^b f(x)\,dx$

7. Se $\{a_n\}$ è una successione tale che $a_n \geq 0$ ed esiste $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$ si ha:

(i) se $\ell<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE

(ii) se $\ell>1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DIVERGE

8. (a) $\cancel{\text{AC}}$ | C | NC (b) AC | $\cancel{\text{C}}$ | NC

9. $e^{-x}\left(-2\cos(x)-3\sin(x)\right)+x+2$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

C

SECONDA PARTE

6. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile. Allora:

$\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f$. Se poi f è continua

esiste $t\in[a,b]$ tale che $f(t)=\int_a^b f(x)\,dx$

7. Se $\{a_n\}$ è una successione tale che $a_n\geq 0$ ed

esiste $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ si ha:

(i) se $l<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE

(ii) se $l>1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DIVERGE

8. (a) ~~AC~~ | C | NC (b) AC | ~~C~~ | NC

9. $e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{5}{2}\sin(x)\right)+2x+\frac{1}{2}$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

D

SECONDA PARTE

6. Se $\{a_n\}$ è una successione tale che $a_n \geq 0$ ed

esiste $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ si ha:

(i) se $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE

(ii) se $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DIVERGE

7.

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora:

$\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f$. Se poi f è continua

esiste $t \in [a,b]$ tale che $f(t) = \int_a^b f(x)\,dx$

8. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC

9. $e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\cos(x) - 2\sin(x)\right) + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

3) (a) $\dfrac{n^3+n-\sin(cn)}{Dn^3+1} = \dfrac{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{\sin(cn)}{n^3}\right)}{Dn^3\left(1+1/Dn^3\right)} = \dfrac{1}{D}\left(1+o(1)\right) \to \boxed{\dfrac{1}{D}}$

(noto che $\sin(cn)$ è limitato, anche se non ha limite, $\Rightarrow \dfrac{\sin(cn)}{n^3} \to 0$)

(b) $\sqrt{n^2+En-1} - n = \dfrac{\cancel{n^2}+En-1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+En-1}+n} = \dfrac{En}{n}\dfrac{\left(1-1/En\right)}{\sqrt{1+\frac{E}{n}-\frac{1}{n^2}}+1} = E\,\dfrac{1+o(1)}{2+o(1)} \to \boxed{E/2}$

4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{Ax}(1-Ax)^{1-x}-1}{\cos(x)-1} = (*)$. Si ha

$$e^{Ax}(1-Ax)^{1-x} = e^{Ax}\, e^{(1-x)\ln(1-Ax)} = e^{Ax+(1-x)\ln(1-Ax)}$$

Considero l'esponente: $Ax+(1-x)\ln(1-Ax) =$

$$Ax+(1-x)\left(-Ax-\frac{A^2x^2}{2}+o(x^2)\right) = Ax-Ax-\frac{A^2}{2}x^2+Ax^2+o(x^2) =$$

$\dfrac{A(2-A)}{2}x^2+o(x^2)$. Passiamo all'esponenziale:

$$e^{\frac{A(2-A)}{2}x^2+o(x^2)} = 1+\frac{A(2-A)}{2}x^2+o(x^2).$$ Inoltre

$\cos(x)-1 = 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-1$ di modo che:

$$(*) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{A(2-A)}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{A(2-A)}{2}x^2}{-\frac{x^2}{2}} = \boxed{A(A-2)}$$

(5) $$f(x) = \frac{28}{x-4} - \ln(7x^2-7x+4)$$

(a) Il dominio è dato da $x \neq 4$ e $7x^2-7x+4>0$. La seconda condizione è vuota, dato che $7^2-4\cdot 4\cdot 7 = 7(7-16)<0$.

DUNQUE $f: \mathbb{R}\setminus\{4\} \to \mathbb{R}$

(b) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 - \ln(\infty) = \boxed{-\infty}$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 - \ln(\infty) = \boxed{-\infty}$

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty - \ln(4) = \boxed{-\infty}$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty - \ln(4) = \boxed{+\infty}$

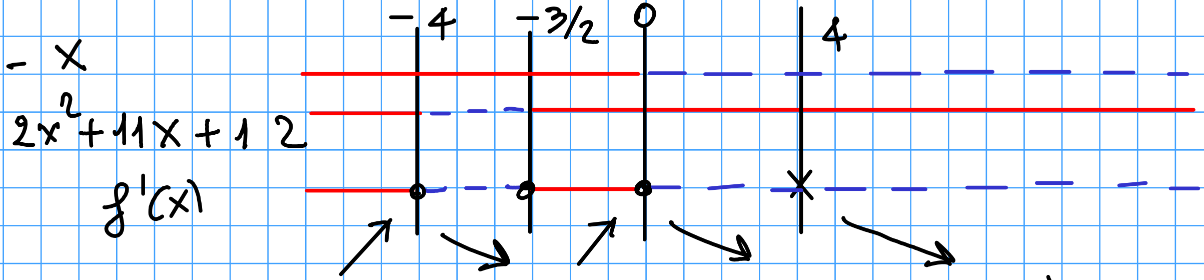
(c) il segno non è facilmente individuabile - SALTIAMOLO.

(d) $$f'(x) = \frac{-28}{(x-4)^2} - \frac{14x-7}{7x^2-7x+4} = (-7)\frac{4(7x^2-7x+4)+(2x-1)(x^2-8x+16)}{(x-4)^2(7x^2-7x+4)} =$$

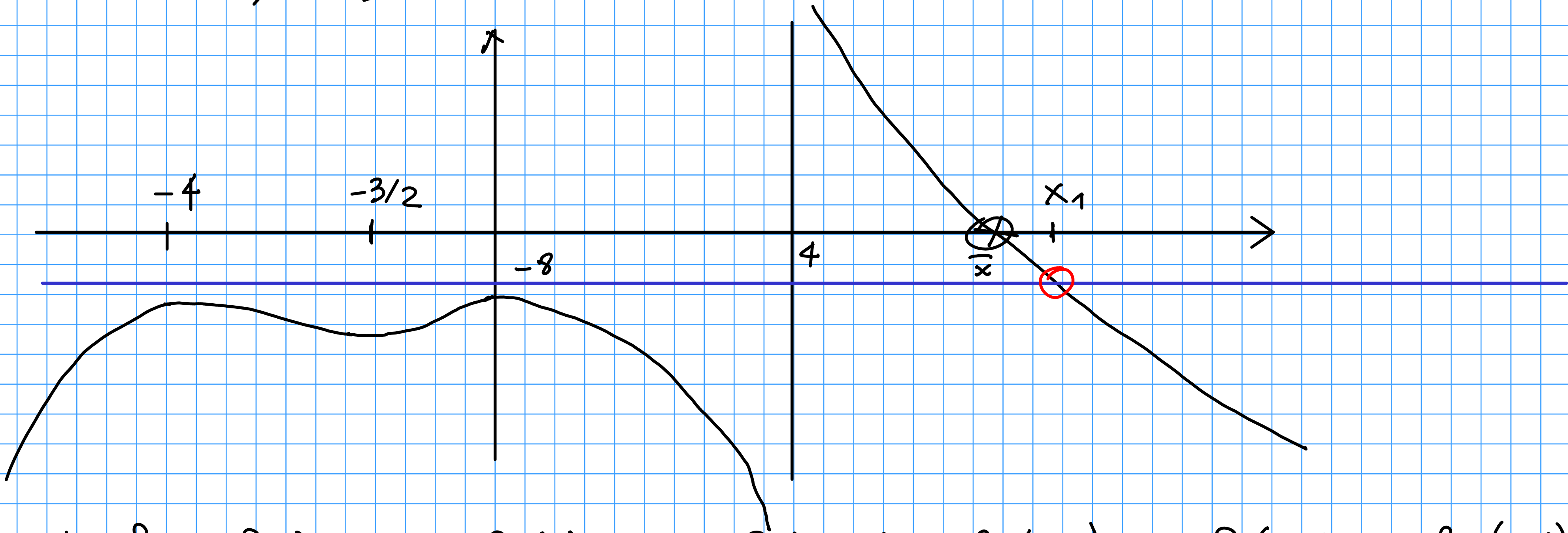
$$\frac{-7x(2x^2+11x+12)}{(x-4)^2(7x^2-7x+4)}$$

Troviamo gli zeri del numeratore (il denominatore è sempre >0, se $x\neq 4$)

$x(2x^2+11x+12)=0 \iff x=0,\ x=-\frac{3}{2},\ x=-4$. Il segno è dato da



da cui il grafico:



Noto che $f(0) = -7 - \ln(4)$, $f(-3/2) = -\ln\left(\frac{121}{4}\right) - \frac{56}{11}$ $f(-4) = -\ln(144) - \frac{7}{2}$

(si può vedere che $f(-4) < f(0) < 0$).

Dunque il segno risulta dal grafico (in particolare c'è un solo valore $\bar{x} > 4$ in cui $f(\bar{x}) = 0$.

Infine si nota che $f(0) = -7 - \ln(4) < -7 - \ln(e) = -7 - 1 = -8$ da cui la retta $y = -8$ sta sopra $f(x)$ sulle $x < -4$. (linea blu sopra). Dunque $f(x) = -8$ HA UNA SOLA SOLUZIONE ($x_1 > \bar{x} > 4$)

8) (a) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{E}{n}\right)$ Dato che $\sin\left(\frac{E}{n}\right) > 0$ la serie è a segni alterni. Dato che

$n \to \sin\left(\frac{E}{n}\right)$ è decrescente la serie converge per Leibniz. Se si passa alla serie dei valori assoluti si trova $\sum_{1}^{\infty} \sin(E/n)$ di termine generale $\sin\left(\frac{E}{n}\right) \simeq \frac{E}{n}$. Tale serie NON CONVERGE dunque la serie di partenza converge, ma non assolutamente $\boxed{C}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos\left(\frac{D}{n}\right) - 1\right)$. Vediamo direttamente la convergenza assoluta, cioè la conv. di $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{D}{n}\right) - 1\right)$. Dato che $\cos\left(\frac{D}{n}\right) - 1 \simeq \frac{D^2}{2n^2}$ e che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow$ la serie converge. In def. la risposta è $\boxed{AC}$

(9) $y'' + 2y' + 2y = Cx + D$. Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 + 2z + 2$ le cui radici sono $-1 \pm i$ (complesse).

Dunque le soluzioni dell'omogenea sono

$$y_0(x) = e^{-x}(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)).$$

Cerchiamo una sol. della non omogenea del tipo $\bar{y}(x) = \gamma x + \delta$

È facile vedere che $\bar{y}'' + 2\bar{y}' + 2y = 2\gamma + 2\gamma x + 2\delta \Rightarrow$

$\gamma = \frac{C}{2}$, $\delta = \frac{D-C}{2}$ e quindi l'equazione ha come soluzioni

$$y(x) = e^{-x}\left(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\right) + \frac{C}{2}x + \frac{D-C}{2}$$

Imponendo $y(0)=0$ trovo $\alpha = \frac{C-D}{2}$. Imponendo $y'(0)=0$ trovo $\beta = -\frac{D}{2}$. IN DEFINITIVA

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{C-D}{2}\cos(x) - \frac{D}{2}\sin(x)\right) + \frac{C}{2}x + \frac{D-C}{2}$$

10) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{x-1}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx$ Conviene dividere l'integrale in due pezzi

1 $\displaystyle = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{x}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{2} =$

$$\arcsin(1) - \arcsin(\sqrt{3}/2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

2 $\displaystyle = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} =$ $\left(y = x^2 \quad dy = 2x\,dx\right)$

$$\frac{1}{2}\int_3^4 \frac{dy}{y\sqrt{4-y}} = \left(\sqrt{4-y}=t,\quad y=4-t^2,\quad dy=-2t\,dt\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{-2t}{(4-t^2)\,t} = \int_0^1 \frac{dt}{4-t^2} = \int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t-2}\right)dt =$$

$$\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\ln 3 - \ln(1)\right) = \frac{1}{4}\ln(3).$$

IN DEFINITIVA L'INTEGRALE FA 1 − 2 = $\boxed{\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\ln(3)}$