Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 21 febbraio 2011

1. Siano $f(x) = e^{-x^2} - 1$, $g(x) = \cos(x) - 1$ e $h(x) = e^{-x^2} - \cos(x)$.
   Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

   (a) $f(x) = O(g(x))$; (b) $g(x) = O(f(x))$; (c) $h(x) = o(g(x))$; (d) $g(x) = o(h(x))$.

2. Se $\lambda = \inf \left\{ y \in \mathbb{R} : y > \frac{1}{x^2 - 4} \ \forall x \in]-1, 1[\right\}$, allora (2/-0,5 p.).

   (a) $\lambda = -\infty$; (b) $\lambda = -2$; (c) $\lambda = -1$; (d) $\lambda = -\frac{1}{4}$; (e) $\lambda = -\frac{1}{3}$; (f) $\lambda = -4$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

   $$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n + \ln(1+n^4)}{1 + \ln(1+n^5)}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

   $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1-2x} e^{-x} - 1}{\cos(x) - 1}$$

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y'' + 2y' = x$, ambientata su $x \in \mathbb{R}$. (1/-1 p.)

   (a) ha un'unica soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 0$; (b) ha una soluzione costante;
   (c) tutte le sue soluzioni sono monotone; (d) è un' equazione lineare.

6. Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

   (a) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1]$ e converge per le stesse x.
   (b) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1]$.
   (c) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge per le stesse x.
   (d) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in]-1, 1]$.
   (e) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1[$.
   (f) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge per le stesse x.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

   $$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{4 - x^2}} \, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

   $$y' = \frac{8xy}{4x^2 + 1} + 13 - 3x^2, \qquad \text{(per } x \geq 0\text{)}, \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcoli (al variare di y_0) il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$ (1 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (3 p.);
   (d) si dica per quali y_0 (se ce ne sono) l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni in $[0, +\infty[$. (1 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 21 FEBBRAIO 2011
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	

1. (a) ~~sì~~ no (b) ~~sì~~ no (c) sì ~~no~~ (d) sì ~~no~~

2. a b c ~~d~~ e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

3. (a) $(2/e)^2$ (b) $+\infty$

5. (a) sì ~~no~~ (b) sì ~~no~~ (c) sì ~~no~~ (d) ~~sì~~ no

6. a b c d ~~e~~ f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

7. $\frac{1}{4}\ln(3)$ NON ESISTE

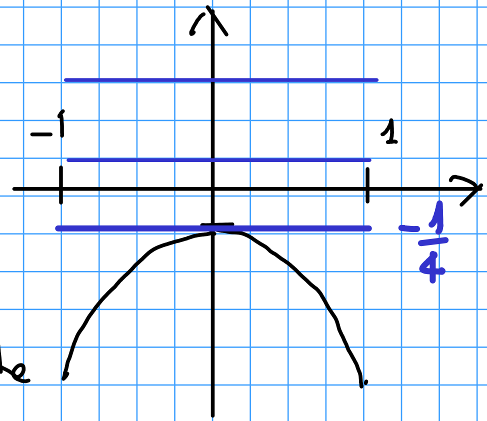
Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

(1) $f(x) \simeq -x^2$, $g(x) \simeq -\frac{x^2}{2}$, $h(x) \simeq -x^2 + \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2}$ $\Longrightarrow$

$f(x) = O(g(x))$ $\boxed{\text{SI}}$ $\quad$ $g(x) = O(f(x))$ $\boxed{\text{SI}}$

$h(x) = o(g(x))$ $\boxed{\text{NO}}$ $\quad$ $g(x) = o(h(x))$ $\boxed{\text{NO}}$

(2) Posto $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ in $]-1, 1[$ il grafico di f è (come si vede subito) quello a destra $\longrightarrow$



Allora $\inf\{y : f(x) < y \ \forall x \in]-1,1[\}$ è l'intercetta della retta più bassa che sta tutta sopra f, cioè

$\lambda = -\frac{1}{4}$

(3) (a) $\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}$. Posto $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ usiamo Cesaro:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \frac{n^{2n}}{2n!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \longrightarrow 2 \cdot 2 \left(\frac{1}{e}\right)^2 = \left(\frac{2}{e}\right)^2$$

(b)
$$\frac{n + \ln(1+n^4)}{1 + \ln(1+n^5)} = \frac{n(1+o(1))}{\ln(1+n^5)(1+o(1))} = \frac{n}{\ln(1+n^5)}(1+o(1)) \longrightarrow +\infty$$

(perché – qualunque sia k – $\frac{\ln(1+n^k)}{n} = \frac{k\ln(n) + \ln(\frac{1}{n^k}+1)}{n} \longrightarrow 0$).

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1-2x}\, e^{-x} - 1}{\cos(x) - 1}$. SI HA

$(1+x)^{1-2x} = e^{(1-2x)\ln(1+x)} = (*)$. Considero l'esponente

$(1-2x)\ln(1+x) = (1-2x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x - \frac{x^2}{2} - 2x^2 + o(x^2) = x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$

Torno a $(*)$ $\Rightarrow$

$(1+x)^{1-2x} = e^{x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)} = 1 + x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2) + \frac{1}{2}(x + o(x))^2 + o((x+o(x))^2) =$

$1 + x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + x - 2x^2 + o(x^2)$. DUNQUE

$(1+x)^{1-2x}\, e^{-x} = (1 + x - 2x^2 + o(x^2))(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) =$

$1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \cancel{x} - x^2 + o(x^2) - 2x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$

INFINE $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ da cui il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2) - 1}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 5$$

(6) $y'' + 2y' = x$. Trovo le sol. dell'omogenea che sono

$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2$ al variare di c_1, c_2. Cerco una sol. particolare del tipo $\bar{y}(x) = ax^2 + bx \Rightarrow \bar{y}'' + 2\bar{y}' = 2a + 4ax + 2b \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$.

Dunque $y(x) = c_1 e^{-2x} - c_2 + \frac{x^2 - x}{4}$ al variare di c_1, c_2. Allora

(a) NO (ne ho infinite - una per ogni valore di $y'(0)$) (b) NO (si vede...)

(c) no (basta guardare $y'(x)$ al variare di $c_1\ c_2$) (d) SI (ovvio)

(7) $\displaystyle\int_{\sqrt3}^{2} \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt3}^{2} \frac{2x}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left(y=x^2\right)$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_{3}^{4} \frac{dy}{y\sqrt{4-y}} = \left(t=\sqrt{4-y},\ t^2=4-y,\ y=4-t^2,\ dy=-2t\,dt \right)$

$\displaystyle\int_{1}^{0} \frac{-2\cancel{t}\,dt}{(4-t^2)\,\cancel{t}} = \int_{0}^{1} \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\right)dt =$

$\displaystyle\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{4}\Big(\ln(3) - \ln(1)\Big) = \ln\sqrt[4]{3}$

(6) È una serie di potenze di raggio $R=1 \Rightarrow$ conv. ass. per $-1<x<1$ e non converge fuori da $[-1,1]$. In $x=1$ ho la serie $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ che diverge perché si confronto (asintotico) con $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

In $x=-1$ la serie dei moduli è la stessa del caso $x=1 \Rightarrow$ non conv. assolutamente. Senza i moduli ho $\sum (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$ che conv. per Leibniz.

In definitiva CONV. ASS. $\Leftrightarrow -1<x<1$

CONV. $\Leftrightarrow -1\le x<1$

8) $$y' = \frac{8xy}{4x^2+1} + 13 - 3x^2 \qquad \text{su } x \geq 0 \quad , \quad y(0) = y_0$$

(1) Si ha (rispetto alla formula risolutiva vista a lezione) $a(x) = \dfrac{8x}{4x^2+1}$

$\Rightarrow A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \ln(4x^2+1)$ e quindi

$$y(x) = (4x^2+1)\left\{ y_0 + \int_0^x \frac{13-3t^2}{4t^2+1}\,dt \right\} =$$

$$= (4x^2+1)\left\{ y_0 + \int_0^x \left(\frac{13+3/4}{4t^2+1} - \frac{3}{4} \right) dt \right\} = \boxed{(4x^2+1)\left\{ y_0 + \frac{55}{8}\operatorname{arctg}(2x) - \frac{3}{4}x \right\}}$$

(2) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$ (indipendentemente da x)

(3) Poniamo $F(x,y) = \dfrac{8xy}{4x^2+1} + 13 - 3x^2$, di modo che l'equazione si può scrivere $y' = F(x,y)$, $y(0) = y_0$. Allora (per $x \geq 0$)

$$F(x,y) \geq 0 \iff \frac{8xy}{4x^2+1} \geq 3x^2 - 13 \iff x=0 \text{ oppure } x>0 \text{ e } y \geq \frac{(3x^2-13)(4x^2+1)}{8x}$$

Poniamo allora $g(x) := \dfrac{(3x^2-13)(4x^2+1)}{8x}$ e studiamo $g(x)$ su $]0,+\infty[$.

Si ha $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e

$$g'(x) = \frac{1}{8}\,\frac{6x\,(4x^2+1)\,x + (3x^2-13)\,8x\cdot x - (3x^2-13)(4x^2+1)}{x^2} =$$

$$\frac{1}{8x^2}\left(24x^4+6x^2+24x^4-104x^2-12x^2-3x^2+52x^2-13\right)$$

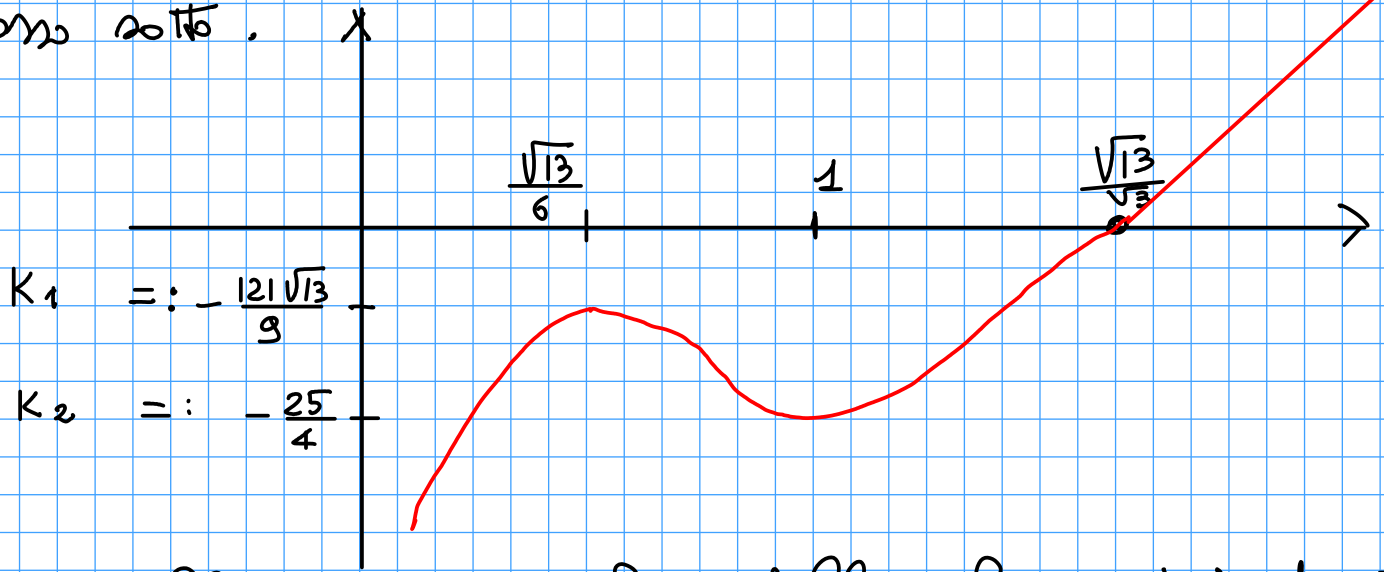
$$\frac{1}{8x^2}\left(36x^4-49x^2+13\right).$$

Troviamo gli zeri di g':

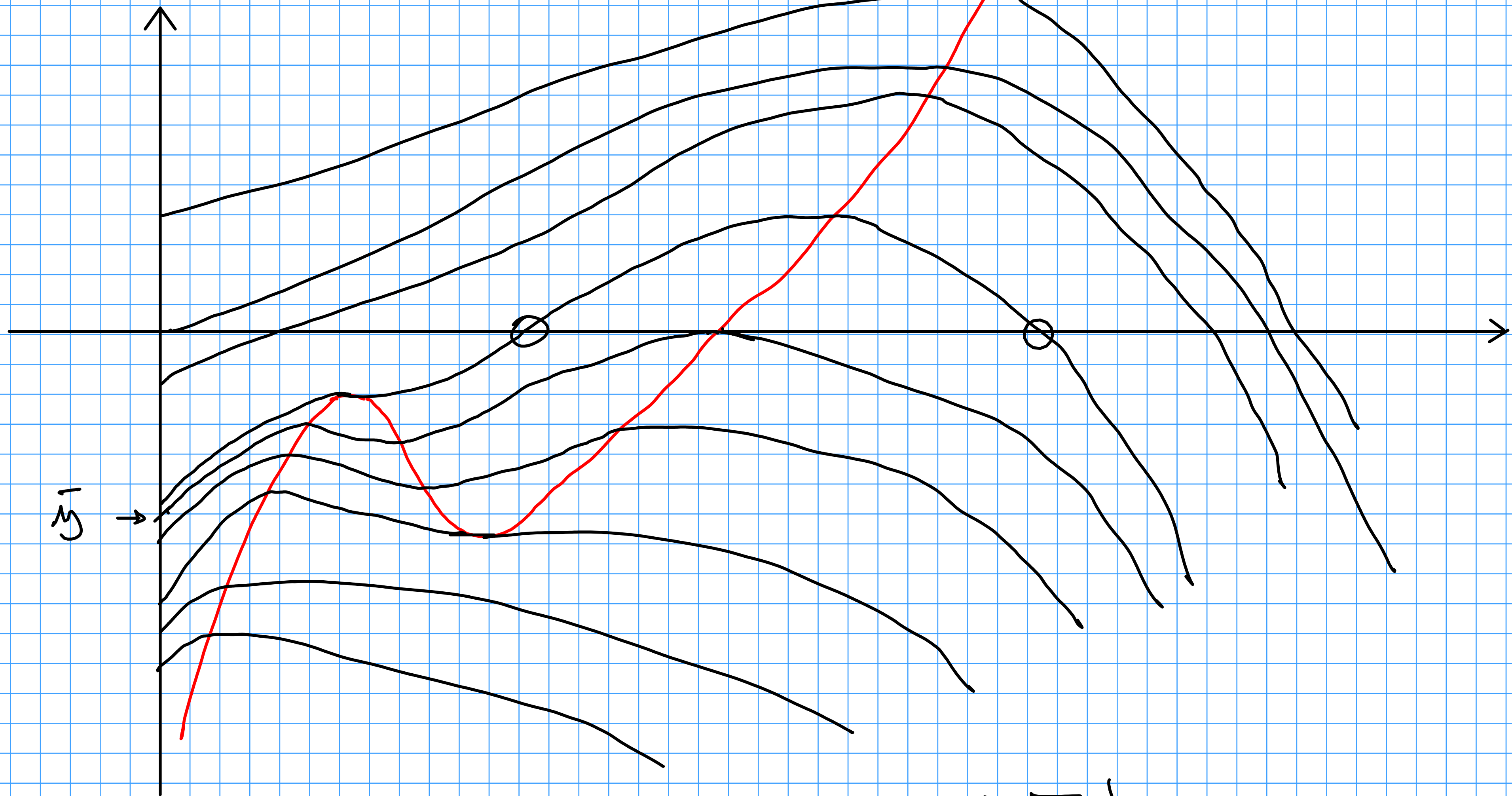
$$g'(x)=0 \iff x^2 = \frac{49 \pm \sqrt{2401-1872}}{72} = \frac{49\pm\sqrt{529}}{72} = \frac{49\pm 23}{72} = \begin{cases} 1 \\ \frac{13}{36} \end{cases}$$

cioè $x=\pm 1$, $x = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$ (di cui ci interessano solo le positive).

Inoltre $g(1) = -\frac{50}{8} = -\frac{25}{4}$, mentre $g\left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right) = -\frac{121\sqrt{13}}{9}$. Ne segue il grafico rosso sotto.



Ne ricaviamo allora i grafici delle soluzioni indicati sotto:



dove $\bar{y}$ si trova imponendo che $y\left(\sqrt{\frac{13}{3}}\right) = 0 \iff$