Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 febbraio 2011 - fila A.

1. Si riporti l'enunciato del teorema degli zeri (4p.)
2. Si riporti l'enunciato del teorema di Lagrange (4p.).
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\ln(1+n^4)}{3+\ln(1+n^5)} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n - 5n!}{4^n - 2^{4n}}$$
4. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti).
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1-4x} - 1 - x + 4x^2}{x - \sin(x)}$$
5. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) := \frac{1}{x^2-3} + \ln(x^2+3)$$
determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \ln(4)$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del criterio di convergenza assoluta per le serie (punti 4).
7. Si scriva la definizione di primitiva(punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{4}{n}\right)}{1+n} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{4}{n}\right)}{1+n}$$
9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)
$$y'' + 5y' = x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$
10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{2\tan(x)+1}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte). Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti. Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino). Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 febbraio 2011 - fila B.

1. Si riporti l'enunciato del teorema di Lagrange (4p.).
2. Si riporti l'enunciato del teorema degli zeri (4p.)
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n - 4n!}{5^n - 2^{4n}} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\ln(1+n^5)}{9+\ln(1+n^4)}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1-5x} - 1 - x + 5x^2}{x - \sin(x)}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{1}{x^2-3} + \ln(x^2+3)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \ln(4)$ (2 punti).

---

6. Si scriva la definizione di primitiva(punti 4).
7. Si scriva l'enunciato del criterio di convergenza assoluta per le serie (punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{5}{n}\right)}{1+n} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{1+n}$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' + 4y' = x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{2\tan(x)+1}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 febbraio 2011 - fila C.

1. Si riporti l'enunciato del teorema di Lagrange (4p.).
2. Si riporti l'enunciato del teorema degli zeri (4p.)
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n - 2n!}{3^n - 2^{4n}} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\ln(1+n^3)}{6+\ln(1+n^2)}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1-3x} - 1 - x + 3x^2}{x - \sin(x)}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{1}{x^2-3} + \ln(x^2+3)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \ln(4)$ (2 punti).

---

6. Si scriva la definizione di primitiva(punti 4).
7. Si scriva l'enunciato del criterio di convergenza assoluta per le serie (punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{3}{n}\right)}{1+n} \quad , \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{1+n}$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' + 2y' = x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{2\tan(x)+1}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino). Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 febbraio 2011 - fila D.

1. Si riporti l'enunciato del teorema degli zeri (4p.)
2. Si riporti l'enunciato del teorema di Lagrange (4p.).
3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\ln(1+n^2)}{7+\ln(1+n^3)} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n - 3n!}{2^n - 2^{4n}}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1-2x} - 1 - x + 2x^2}{x - \sin(x)}$$

5. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{1}{x^2-3} + \ln(x^2+3)$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \ln(4)$ (2 punti).

---

6. Si scriva l'enunciato del criterio di convergenza assoluta per le serie (punti 4).
7. Si scriva la definizione di primitiva(punti 4).
8. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (4p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{1+n} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{1+n}$$

9. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 6)

$$y'' + 3y' = x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

10. Si calcoli l'integrale (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 10).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{2\tan(x)+1}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore (un'ora e mezza per chi fa solo la seconda parte).
Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

Per gli esercizi 3,4,8 e 9 conta solo la risposta. Gli esercizi 5 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento. Il compito è diviso in due parti: esercizi 1-4 (prima parte) e 6-9 (seconda parte) (per poter usare il compitino).
Per la validità di ogni singola parte è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi quattro punti (1-4 o 6-9) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.
Per la validità del compito è necessario che entrambe le parti siano valide.
Il voto complessivo sarà la media tra quello delle due parti.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 14 FEBBRAIO 2011

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	A

PRIMA PARTE

1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (o viceversa) allora esiste x in $]a,b[$ tale che $f(x) = 0$

2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora esiste x in $]a,b[$, tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x)$$

3. (a) $-\frac{4}{5}$ (b) $-\infty$

4. -12

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 14 FEBBRAIO 2011

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: B

PRIMA PARTE

1. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora esiste x in $]a,b[$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x)$$

2. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a)<0$ e $f(b)>0$ (o viceversa) allora esiste x in $]a,b[$ tale che $f(x)=0$

3. (a) $-\infty$ (b) $-\frac{5}{4}$

4. -15

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 14 FEBBRAIO 2011

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	C

PRIMA PARTE

1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Allora esiste x in $]a, b[$, tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x)$$

2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (o viceversa) allora esiste x in $]a, b[$ tale che $f(x) = 0$

3. (a) $-\infty$ (b) $-\frac{3}{2}$

4. -9

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 14 FEBBRAIO 2011

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: D

PRIMA PARTE

1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (o viceversa) allora esiste x in $]a,b[$ tale che $f(x) = 0$

2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora esiste x in $]a,b[$, tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x)$$

3. (a) $-2/3$ (b) $-\infty$

4. -6

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 5.

☐ NON HO FATTO LA PRIMA PARTE (USO IL COMPITINO)

A

SECONDA PARTE

6. Sia $\{a_n\}$ una successione. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente, anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.

7. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Un'altra funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f se F è derivabile in $[a,b]$ e vale
$F'(x) = f(x) \quad \forall x$ in $[a,b]$

8. (a) AC (b) NC

9. $y(x) = \frac{1}{125} - \frac{e^{-5x}}{125} + \frac{x^2}{10} - \frac{x}{25}$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

B

SECONDA PARTE

6. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Un'altra funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f se F è derivabile in $[a,b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \text{ in } [a,b]$$

7. Sia $\{a_n\}$ una successione. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente, anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.

8. (a) NC (b) AC

9. $$y(x) = \frac{1}{64} - \frac{e^{-4x}}{64} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{16}$$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

C

SECONDA PARTE

6. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Un'altra funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f se F è derivabile in $[a,b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \text{ in } [a,b]$$

7. Sia $\{a_n\}$ una successione. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente, anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.

8. (a) NC (b) AC

9. $y(x) = \frac{1}{8} - \frac{e^{-2x}}{8} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

D

SECONDA PARTE

6. Sia $\{a_n\}$ una successione. Se la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente, anche la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.

7. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione.
Un'altra funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$
si dice primitiva di f se F è
derivabile in $[a,b]$ e vale
$F'(x) = f(x) \quad \forall x$ in $[a,b]$

8. (a) AC (b) NC

9. $y(x) = \frac{1}{27} - \frac{e^{-3x}}{27} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$

I fogli bianchi sono riservati per lo svolgimento dell' esercizio 10.

(3) (a)

$$\frac{1-\ln(1+n^A)}{C+\ln(1+n^B)} = \frac{1-\ln(n^A(1+o(1)))}{C+\ln(n^B(1+o(1)))} =$$

$$\frac{1-\ln(n^A)-\ln(1+o(1))}{C+\ln(n^B)+\ln(1+o(1))} = \frac{A\cancel{\ln(n)}}{B\cancel{\ln(n)}}\,\frac{o(1)-1+o(1)}{o(1)+1+o(1)} = \frac{A}{B}(-1+o(1))$$

Dunque il limite è $\frac{A}{B}$

(b)
$$\frac{n^n-An!}{B^n-2^{4n}} = \frac{n^n-An!}{B^n-16^n}$$ (e ogni B è minore di 16)

$$= \frac{n^n(1-o(1))}{16^n(o(1)-1)}$$ $\left(\text{perché } \frac{n!}{n^n}\to 0 \text{ e } \frac{B^n}{16^n}=\left(\frac{B}{16}\right)^n\to 0\right)$

$$= \frac{n^n}{16^n}(-1+o(1))$$ che tende a $-\infty$, dato che $\frac{n^n}{16^n}\to+\infty$

(4) $$(1+x)^{(1-Ax)} = e^{(1-Ax)\ln(1+x)}.$$ Consideriamo l'esponente

$$(1-Ax)\ln(1+x) = (1-Ax)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) =$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-Ax^2+\frac{A}{2}x^3+o(x^3) = x-\left(\frac{1}{2}+A\right)x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{A}{2}\right)x^3+o(x^3)$$

DA CUI, tornando all'esponenziale e usando $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)$

$$(1+x)^{(1-Ax)} = 1 + x - \left(\frac{1}{2}+A\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{A}{2}\right)x^3 + o(x^3) + \frac{1}{2}\left(x - \left(\frac{1}{2}-A\right)x^2 + o(x^2)\right)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\left(x+o(x)\right)^3\right) + o\left(\left(x+o(x)\right)^3\right) =$$

$$1 + x + \left(-\frac{1}{2} - A\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{A}{2}\right)x^3 + o(x^3) + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2\left(\frac{1}{2}-A\right)x^3 + o(x^3)\right) +$$
$$+ \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) = 1 + x - Ax^2 - \frac{A}{2}x^3 + o(x^3)$$

Infine $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ da cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{(1-Ax)} - 1 - x + Ax^2}{x - \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{A}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -3A$$

(5) $$f(x) = \frac{1}{x^2-3} + \ln(x^2+3)$$

- DOMINIO : $x^2 - 3 \neq 0$, $x^2 + 3 > 0 \iff x \neq \pm\sqrt{3}$

  sempre vero

- Notiamo che f è pari : $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

- $f(0) = \ln(3) - \frac{1}{3} > 0$ (perché $3 > e \Rightarrow \ln(3) > 1$)

$\lim_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to \sqrt{3}^+} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ ($-\infty$ e $-\sqrt{3}$ si ottengono per simmetria.

- Segno: non è immediato - saltiamolo
- derivata prima: $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-3)^2} + \frac{2x}{x^2+3} = 2x\left(\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{x^4-6x^2+9}\right)$

$= 2x \frac{x^4 - 7x^2 + 6}{(x^2+3)(x^2-3)^2}$ $\qquad$ (per $x \neq \pm\sqrt{3}$).

È chiaro che il segno di f' coincide con il segno del numeratore (denominatore ≥ 0). Si ha

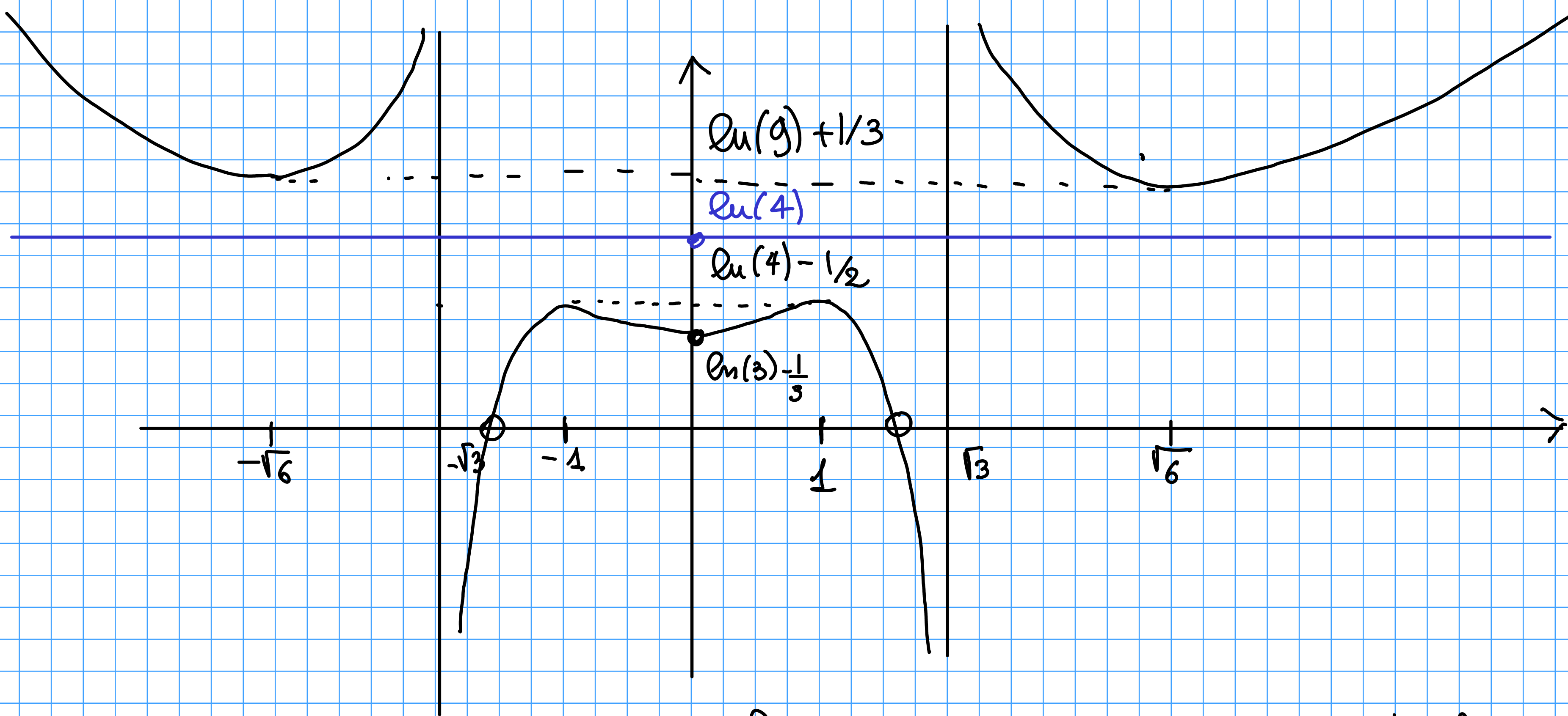
$$x^4 - 7x^2 + 6 = 0 \iff x^2 = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases} \iff x = \pm 1 \text{ o } x = \pm\sqrt{6}$$

Inoltre, $x^4 - 7x^2 + 6 \geq 0 \iff x^2 \leq 1$ o $x^2 \geq 6$, cioè su $]-\infty, -\sqrt{6}] \cup [-1,1] \cup [\sqrt{6}, +\infty[$

L'ulteriore moltiplicazione per x a numeratore inverte i segni sulle $x < 0$.

Dato che $f(\pm 1) = \ln(4) - \frac{1}{2}$ $\qquad f(\pm\sqrt{6}) = \ln(9) + \frac{1}{3}$

abbiamo i grafici seguenti:



in particolare la f ha due radici simmetriche, una tra 1 e $\sqrt{3}$ e l'altra in posizione opposta.

Infine essendo $\ln(4)-\frac{1}{2} < \ln(4) < \ln(9)+\frac{1}{3}$ la linea blu del disegno non interseca il grafico $\Rightarrow f(x) = \ln(4)$ NON HA SOLUZIONI.

(8) (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(A/n)}{1+n}$; posto $a_n = \dfrac{\sin(A/n)}{1+n}$ si vede che $a_n \geq 0$

e che $a_n = \dfrac{A/n + o(1/n)}{1+n} = \dfrac{A}{n^2}(1+o(1)) \simeq \dfrac{1}{n^2}$. Poiché

$\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ onde $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n < +\infty$ per il criterio del confronto

Dato che $\left|\frac{(-1)^n \sin(A/n)}{1+n}\right| = a_n \Rightarrow$ la serie di potenze converge assolutamente

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(A/n)}{1+n}$ Poniamo $a_n = \frac{\cos(A/n)}{1+n}$. Dato che

$\cos(A/n) \to 1$ a ho $a_n = \frac{1+o(1)}{1+n} = \frac{1}{n} \frac{1+o(1)}{1+o(1)} = \frac{1}{n}(1+o(1)) \simeq \frac{1}{n}$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (NOTA CHE $a_n \geq 0$!)

(g) $y'' + A y' = x$. Il polinomio caratteristico è

$P(z) = z^2 + Az$. Le radici di $P(z)$ sono $z=0$ e $z=-A$

per cui le soluzioni dell'equazione omogenea sono descritte da

$$y_0(x) = c_1 e^{-Ax} + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ (voglio solo le sol. reali)}$$

Cerco $\bar{y}(x)$ soluzione particolare. Noto che il termine noto è

$x e^{0\cdot x}$ e che 0 <u>È RADICE DI $P(z)$</u>. Dunque dovrò cercare

$\bar{y}(x)$ del tipo $Q(x) e^{0\cdot x} = Q(x)$ con $Q(x)$ polinomio

di grado DUE: $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Dato che le costanti

sono soluzioni dell'omogenea so già che c è arbitrario $\Rightarrow$

scelgo $c=0$. Metto $\bar{y}(x) = ax^2 + bx$ nell'equazione e trovo:

$$\bar{y}'' + A y' = 2a + A(2ax+b) = 2Aax + 2a + Ab$$

Se voglio che questo faccia x devo imporre $2Aa = 1$, $2a + Ab = 0$

da cui $a = \frac{1}{2A}$ e $b = -\frac{1}{A^2}$. Quindi la soluzione generale è

$$c_1 e^{-Ax} + c_2 + \frac{x^2}{2A} - \frac{x}{A^2} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Imponendo $y(0)=0$ ottengo $c_1 + c_2 = 0$. Derivando trovo

$$y'(x) = -Ac_1 e^{-Ax} + \frac{x}{A} - \frac{1}{A^2}$$ da cui imponendo $y'(0)=0$

$$-Ac_1 - \frac{1}{A^2} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{A^3} \quad c_2 = \frac{1}{A^3}$$ che alla fine dà

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{A^3} - \frac{1}{A^3} e^{-Ax} + \frac{x^2}{2A} - \frac{x}{A^2}}$$

(10) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan(x)}{2\tan(x)+1}\, dx$$

Facciamo la sostituzione $\tan(x) = y \iff x = \operatorname{atan}(y)$

$\Rightarrow dx = \frac{dy}{1+y^2}$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{y}{2y+1} \frac{dy}{y^2+1}$$

Cerchiamo di ridurre in fratti semplici

$$\frac{y}{(2y+1)(y^2+1)} = \frac{A}{2y+1} + \frac{By+C}{y^2+1} = \frac{Ay^2+A+2By^2+2Cy+By+C}{(2y+1)(y^2+1)}$$

che dà le condizioni

$$\begin{cases} A+2B = 0 \\ B+2C = 1 \\ A+C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -2B \\ C = -A = 2B \\ B+4B = 1 \end{cases}$$

$\iff$ $B = \frac{1}{5}$ $A = -\frac{2}{5}$ $C = \frac{2}{5}$ e l'integrale diventa

$$\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{y^2+1} - \frac{2}{2y+1} + \frac{2}{y^2+1}\right)dy = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \ln(2y+1) + 2\operatorname{arctg}(y)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln\frac{\sqrt{y^2+1}}{2y+1} + 2\operatorname{arctg}(y)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{5}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2\frac{\pi}{2} - 0 - 0\right) = \boxed{\frac{\pi - \ln(2)}{5}}$$