Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 7 febbraio 2011

1. Siano $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = \cos(x) - 1$ e $h(x) = e^x - \cos(x)$.
Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

(a) $f(x) = O(g(x))$; (b) $g(x) = O(f(x))$; (c) $h(x) = O(g(x))$; (d) $g(x) = O(h(x))$.

2. Se $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^2 - x^4$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ?
Nota: chiamiamo "estremo relativo" un numero che sia o di massimo relativo o di minimo relativo. (2/-0,5 p.).

(a) f ha due estremi relativi e un punto stazionario; (b) f ha due estremi relativi e due punti stazionari;
(c) f ha due estremi relativi e tre punti stazionari; (d) f ha tre estremi relativi e un punto stazionario;
(e) f ha tre estremi relativi e due punti stazionari; (f) f ha tre estremi relativi e tre punti stazionari .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n!)}{n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n - n!}{3^n - 2^{2n}}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x \cos(\sqrt{2}x) - 1}{x^3}$$

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y'' + 2y' + 4y = x$, ambientata per $x \geq 0$ - cioè nell'intervallo $[0, +\infty[$. (1/-1 p.)

(a) ha un'unica soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 1$; (b) ha una soluzione crescente;
(c) tutte le sue soluzioni sono monotone; (d) tutte le sue soluzioni sono illimitate.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

(a) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1]$ e converge per le stesse x.

(b) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1]$.

(c) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge per le stesse x.

(d) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in]-1, 1]$.

(e) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1[$.

(f) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge per le stesse x.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(2x+1)(x^2+4)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{xy}{x^2+1} + 3 - 4x, \qquad (\text{per } x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

(a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
(b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (1 p.);
(c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (3 p.);
(d) si dica se ci sono y_0 per cui la soluzione y è strettamente crescente su $[0, +\infty[$. (1 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 7 FEBBRAIO 2011
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

1. (a) sì ~~no~~ (b) ~~sì~~ no (c) sì ~~no~~ (d) ~~sì~~ no

2. a b ~~c~~ d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

3. (a) $+\infty$ (b) $-\infty$

5. (a) sì ~~no~~ (b) ~~sì~~ no (c) sì ~~no~~ (d) ~~sì~~ no

6. a b c d e ~~f~~ NESSUNA DELLE PRECEDENTI

7. $\frac{2}{17}(\pi - \ln(2))$ NON ESISTE

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

1) Dato che $f(x) = e^x - 1 = x + o(x) \simeq x$

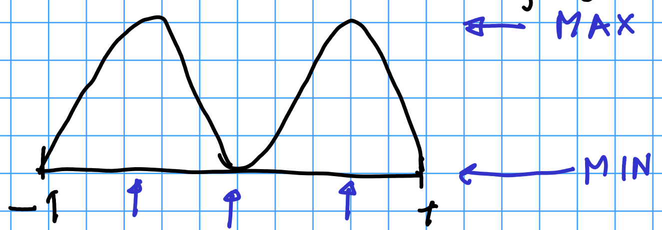
$g(x) = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \simeq -\frac{x^2}{2}$

$h(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = x + O(x^2) \simeq x$

si ha $g(x) = o(f(x)) \Rightarrow g = O(f)$ MA NON VALE $f = O(g)$

e $g(x) = o(h(x)) \Rightarrow g = O(h)$ MA NON VALE $h = O(g)$

2) Tracciando il grafico di f si trova:



$\Rightarrow$ 2 estremi relativi (il MAX e il MIN)

e 3 punti stazionari

(ci sono poi 5 punti di estremo relativo...)

3) (a) $\frac{\ln(1+n!)}{n} = \frac{\ln(n!)}{n} + \frac{\ln(1/n!+1)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) + o(1)$. Dato che

$\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ (Cesaro) $\Rightarrow \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) \to +\infty$ e il limite complessivo è $+\infty$

(b)

$$\frac{n^n - n!}{3^n - 2^{2n}} = \frac{n^n(1-o(1))}{4^n(o(1)-1)} = \frac{n^n}{4^n}(-1+o(1)) \to -\infty \quad \left(\text{perché } \frac{n^3}{4^n} \to +\infty\right)$$

4) Si ha:

$$(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)} = e^{x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x)\right)} = e^{\underbrace{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}_{y}} =$$

$$1+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)+O\left(\left(x^2+o(x^2)\right)^2\right) = \qquad \left(e^y = 1+y+O(y^2)\right)$$

$$1+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)+O\left(x^4+o(x^4)\right) = 1+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

- $\cos(\sqrt{2}x) = 1-\frac{(\sqrt{2}x)^2}{2}+o(x^3) = 1-x^2+o(x^3) \implies$
- $(1+x)^x\cos(\sqrt{2}x)-1 = \left(1+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)\left(1-x^2+o(x^3)\right)-1 =$

$$\cancel{1}+\cancel{x^2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\cancel{-x^2}+o(x^4)-\frac{x^3}{3}+o(x^5)\cancel{-1} = -\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

$$\implies \text{LIMITE} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

(5) Risolvendo l'eq. diff. si trova:

$$y(x) = e^{-x}\left(\alpha\cos(\sqrt{3}x)+\beta\sin(\sqrt{3}x)\right)+\frac{2x-1}{8} \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

DUNQUE

(a) Ci sono infinite sol con $y(0)=1$ (posso scegliere ad arbitrio $y'(0)$) $\implies$ $\boxed{\text{NO}}$

(b) ho una sol. crescente: quella con $\alpha=\beta=0$ $\implies$ $\boxed{\text{SI}}$

(c) Non è vero che le sol. sono monotone se $\alpha\neq 0$ o $\beta\neq 0$ $\implies$ $\boxed{\text{NO}}$

(d) Tutte le sol. sono illimitate, dato che tendono a $+\infty$ se $x\to+\infty$ $\implies$ $\boxed{\text{SI}}$

(6) Si tratta di una serie di potenze con raggio di conv. 1. Se $|x|=1$

la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ $(x=1)$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ $(x=-1)$

In entrambi i casi la serie NON CONVERGE, dato che il termine generale non tende a zero. Dunque la serie converge (e conv. assolutamente) SOLO per $x \in]-1, 1[$.

(7) Riducendo in fratti semplici si trova

$$\frac{x}{(2x+1)(x^2+4)} = \frac{1}{17}\left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{2}{2x+1} + \frac{8}{x^2+4}\right) \Rightarrow$$

$$\text{INTEGRALE} = \frac{1}{17}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{2x+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{\cancel{8}^{\,2}}{17}\frac{1}{\cancel{4}}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} =$$

$$\frac{1}{17}\left(\ln(1/2) - \ln(2)\right) + \frac{4}{17}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{17}\left(-2\ln(2)\right) + \frac{4}{17}\frac{\pi}{2} = \frac{2}{17}\left(\pi - \ln(2)\right)$$

(8) (a) Applicando la formula ($a(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow A(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$)

$$y(x) = \sqrt{x^2+1}\left(y_0 + \int_0^x \frac{3-4t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt\right) = \sqrt{x^2+1}\left(y_0 + 3\operatorname{arcsinh}(x) - 4\sqrt{x^2+1} + 4\right)$$

(b) Dato che $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, che è "più lento di $\sqrt{x^2+1}$

si ha $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$

(c) Per studiare la monotonia di $y(x)$, al variare di y_0, poniamo $F(x,y) = \frac{xy}{x^2+1} + 3 - 4x$. Allora l'eq. diventa $y' = F(x,y)$. Si ha

$F(x,y) = 0 \iff y = \frac{(4x-3)(x^2+1)}{x} = g(x)$. Inoltre

$F(x,y) > 0 \iff \begin{cases} y > g(x) & \text{per } x > 0 \\ y < g(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$ (e il contrario per $F(x,y) < 0$)

Studiamo allora il grafico di $g(x)$. Si ha che $g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to0^-} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to0^+} g(x) = -\infty$

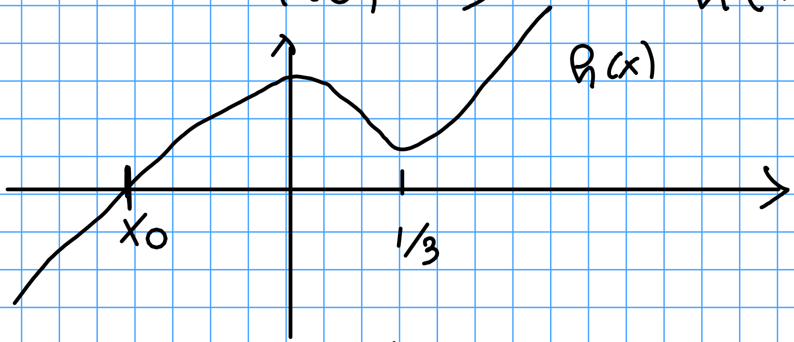
Inoltre $g(x) = 0 \iff x = \frac{3}{4}$. Calcolando g' si trova

$$g'(x) = \frac{8x^3 - 3x^2 + 3}{x^2}$$

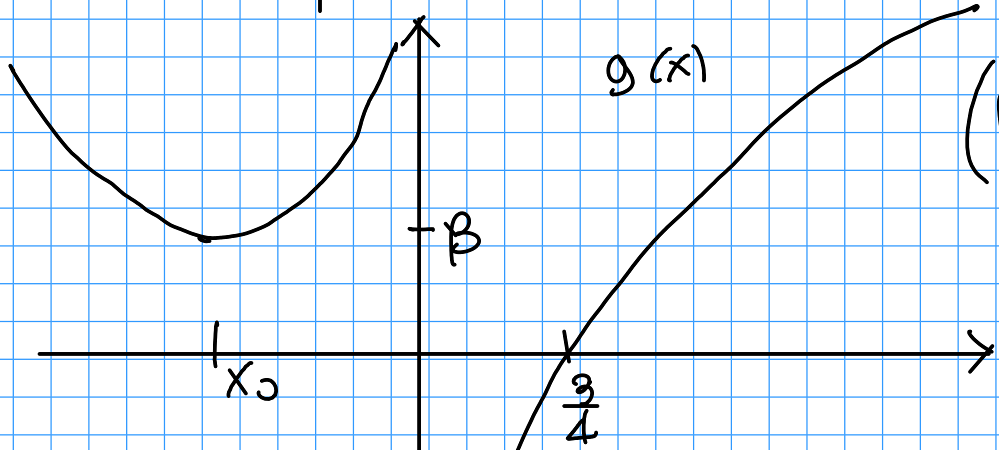
Dato che non è evidente il segno di g', poniamo $h(x) := 8x^3 - 3x^2 + 3$ e studiamo h. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

$h'(x) = 24x^2 - 6x \Rightarrow h'(x) = 0 \iff x = 0,\ x = 1/4$ e

$h(0) = 3$ $\qquad h(1/3) = \frac{8}{27} - \frac{3}{3} + 3 \; \underline{\underline{> 0}}$. Dunque

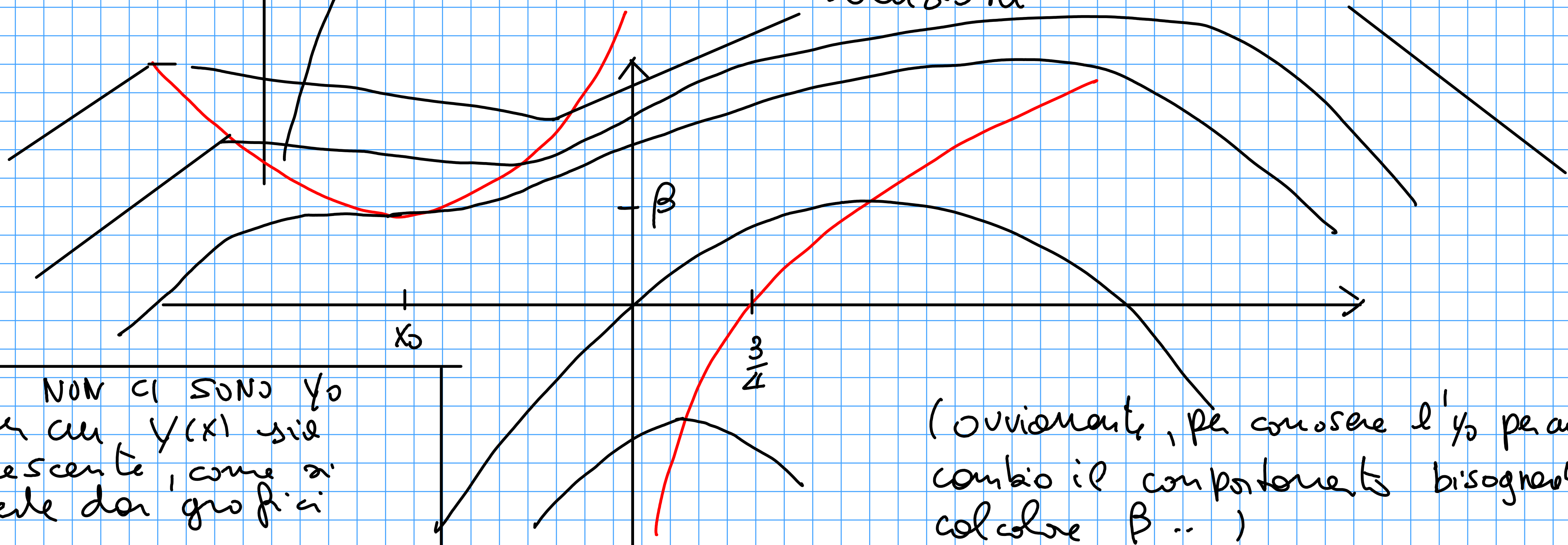


In particolare h si annulla <u>1 VOLTA</u>, in un pto $x_0 < 0$. Ne segue che il grafico di g è più o meno:



($\beta = g(x_0) > 0$ perché g si annulla <u>SOLO</u> in $x = 3/4$)

Ne ricaviamo i grafici delle soluzioni



(d) NON CI SONO y_0 per cui $y(x)$ sia crescente, come si vede dai grafici

(ovviamente, per conoscere l'y_0 per cui cambia il comportamento bisognerebbe calcolare β ..)