Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Esempio di seconda parte compito 2010/2011.

1. Scrivere la definizione di serie assolutamente convergente (4p.)

   Data una successione $\{a_n\}$, si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

2. Si riporti di seguito la formula di integrazione per sostituzione (4p.).

   Date $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ continua e $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ derivabile con φ' continua si ha
   $$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

3. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (4 punti ciascuno)

   $(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{1+n^4}\quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\,\boxed{\text{C}}\,\boxed{\text{NC}}$ $\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}\quad \boxed{\text{AC}}\,\boxed{\text{C}}\,\boxed{\cancel{\text{NC}}}$

4. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (6p):
   $$\begin{cases} y'' - 2y' + 4y = 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$
   $$y(x) = e^x\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\sin(\sqrt{3}x) - \frac{1}{4}\cos(\sqrt{3}x)\right) + \frac{1}{4}$$

5. Si calcoli il seguente integrale improprio (se esiste - oppure si mostri che non esiste) (10 punti).
   $$\int_0^{\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}dx$$

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 3 E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.
AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

(3) (a) Pongo $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{1+n^4}$. Allora $|a_n| = \frac{n^2}{1+n^4}$. Si vede subito che $|a_n| \simeq \frac{1}{n^2}$, dato che $\frac{a_n}{1/n^2} = \frac{n^4}{1+n^4} \to 1$. Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ anche $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente.

(b) Pongo $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$. Allora $|a_n| = \frac{n}{n+1}$. Dato che $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ non può essere $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (perché se no anche $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$).

Dunque non vale la condizione necessaria e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.

(4) Si tratta di un'equazione lineare a coeff. costanti di ordine 2. Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2z + 4$. Trovo le radici di $P(z)$:

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm \sqrt{3}\, i$$

$\Rightarrow$ le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$y(x) = c_1 e^{(1+\sqrt{3}i)x} + c_2 e^{(1-\sqrt{3}i)x}$$ (al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{C}$)

$= e^x (\alpha \cos(\sqrt{3}x) + \beta \sin(\sqrt{3}x))$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – se cerco solo le sol. reali.

Passando al termine noto $b(x) = 1$ vedo che è del tipo $p(x) e^{z_0 x}$ con $p(x) = 1$ (grado $= 0$) e $z_0 = 0$. Essendo che $z_0 = 0$ non è radice di $P(z)$ posso cercare $\overline{y}(x)$ – soluzione particolare dell'equazione completa – del tipo

$\bar{y}(x) = c$ (c costante : $c = q(x)e^{0\cdot x}$ con q di grado zero!!)

È facile vedere che $\bar{y}''(x) = \bar{y}'(x) = 0 \Rightarrow$ deve essere $4c = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1/4}$. Dunque

la sol. generale dell'equazione è

- $y(x) = e^x(\alpha\cos(\sqrt{3}x) + \beta\sin(\sqrt{3}x)) + \frac{1}{4}$. $\Rightarrow \boxed{y(0) = \alpha + \frac{1}{4}}$

Calcoliamone la derivata:

- $y'(x) = e^x(\alpha\cos(\sqrt{3}x) + \beta\sin(\sqrt{3}x)) + e^x(-\alpha\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x) + \beta\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)) =$

$$e^x\left((\alpha + \sqrt{3}\beta)\cos(\sqrt{3}x) + (\beta - \sqrt{3}\alpha)\sin(\sqrt{3}x)\right) \Rightarrow \boxed{y'(0) = \alpha + \sqrt{3}\beta}$$

Imponendo le condizioni iniziali trovo

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$ da cui la soluzione richiesta è

$$y(x) = e^x\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\sin(\sqrt{3}x) - \frac{1}{4}\cos(\sqrt{3}x)\right) + \frac{1}{4}$$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}\,dx$. Per prima cosa operiamo la sostituzione $y = e^x \Rightarrow x = \ln y$ e $dx = \frac{dy}{y}$. Dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{y-1}{(y^2+1)y}\,dy = (*)$$

Usiamo la "riduzione in fratti semplici".

$$\frac{y-1}{(y^2+1)y} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+1} = \frac{Ay^2+A+By^2+Cy}{(y^2+1)y} = \frac{(A+B)y^2+Cy+A}{(y^2+1)y}.$$

DA CUI $\begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ A=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$ Dunque

$$(*) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{y+1}{y^2+1} - \frac{1}{y}\right) dy = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{2y}{y^2+1} - \frac{1}{y} + \frac{1}{1+y^2}\right) dy =$$

$$\left[\ln\sqrt{y^2+1} - \ln y + \operatorname{artg}(y)\right]_1^{+\infty} = \left[\ln\frac{\sqrt{y^2+1}}{y} + \arctan(y)\right]_1^{+\infty} =$$

$$0 - \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})} \left(= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)\right)$$