Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 20 dicembre 2010 - fila A.

1. Sia $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ una funzione. Si scriva la caratterizzazione di $\sup_{x \in [0,1[} f(x) = 2$. (3p.)

2. Si riporti di seguito l'enunciato del teorema dei valori intermedi (per le funzioni continue). (3p.).

3. Si riporti di seguito l'enunciato del teorema di Rolle (3p.).

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(Bn! + A^n)}{C^{n+1} + (n+1)!} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^4+4} + An}{Bn+1}$$

5. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^2}\cos(\sqrt{2}x) - 1}{x(\sin(Ax) - Ax)}$$

6. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) := \frac{1}{4\arctan(x) + 4\arctan(1-x) - \pi}$$

determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 1/\pi$ (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 4 E 5 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 6 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.
AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-5 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 20 DICEMBRE 2010

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: A

1. $\sup_{x\in[0,1[} f(x) = 2$ se e solo se

a) $f(x) \le 2 \quad \forall x \in [0,1[$

b) $\forall \varepsilon>0 \quad \exists x \in [0,1[$ tale che $f(x)>2-\varepsilon$

2. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Sia y tale che

$\min_{[a,b]} f \le y \le \max_{[a,b]} f$

Allora esiste $x\in[a,b]$ tale che $f(x)=y$

3. Sia $f:[a,b]$ continua su $[a,b]$ derivabile su $]a,b[$ e tale che $f(a)=f(b)$. Allora esiste $x\in\,]a,b[$ tale che $f'(x)=0$

4. (a) 2 (b) 1

5. 1

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 6.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 20 DICEMBRE 2010

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: B

1. $\sup_{x \in [0,1[} f(x) = 2$ se e solo se

a) $f(x) < 2 \quad \forall x \in [0,1[$

b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in [0,1[$ tale che $f(x) > 2 - \varepsilon$

2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia y tale che

$\min_{[a,b]} f \leq y \leq \max_{[a,b]} f$

Allora esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = y$

3. Sia $f : [a,b]$ continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$ e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x \in]a,b[$ tale che $f'(x) = 0$

4. (a) 3 (b) $\sqrt{2}/3$

5. $2\sqrt{2}$

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 6.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 20 DICEMBRE 2010

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: C

1. $\sup_{x \in [0,1[} f(x) = 2$ se e solo se

a) $f(x) < 2 \quad \forall x \in [0,1[$

b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in [0,1[$ tale che $f(x) > 2 - \varepsilon$

2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia y tale che

$\min_{[a,b]} f \leq y \leq \max_{[a,b]} f$

Allora esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = y$

3. Sia $f : [a,b]$ continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$ e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x \in]a,b[$ tale che $f'(x) = 0$

4. (a) 4 (b) 3/4

5. 8/27

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 6.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 20 DICEMBRE 2010

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: D

1. $\sup_{x \in [0,1[} f(x) = 2$ se e solo se

a) $f(x) < 2 \quad \forall x \in [0,1[$

b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in [0,1[$ tale che $f(x) > 2 - \varepsilon$

2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia y tale che

$\min_{[a,b]} f \leq y \leq \max_{[a,b]} f$

Allora esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = y$

3. Sia $f : [a,b]$ continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$ e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x \in]a,b[$ tale che $f'(x) = 0$

4. (a) 5 (b) 4/5

5. $\frac{1}{8}$

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 6.

(4a) $$a_n = \frac{n\,(B\,n! + A^n)}{C^{n+1} + (n+1)!} = \frac{n \cdot n!\,(B + A^n/n!)}{(n+1)!\,(C^{n+1}/(n+1)! + 1)} = \frac{n}{n+1}\,\frac{B + A^n/n!}{C^{n+1}/(n+1)! + 1}$$

dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n!} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{C^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (come noto) e che

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = B$

(4b) $$a_n = \frac{\sqrt[n]{n^4+4} + An}{Bn+1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\,\frac{\sqrt[n]{n^4+4}/n + A}{B + 1/n} = \frac{\sqrt[n]{n^4+4}/n + A}{B + 1/n}$$

Si ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4+4} = 1$: per vederlo si può usare, per esempio, il rapporto, cioè fare $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4+4}{n^4+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n^4)^4 + 4/n^4}{1 + 4/n^4} = 1$

e dunque $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{A}{B}$

5) $\sqrt{1+2x^2} = 1 + \frac{1}{2} 2x^2 - \frac{1}{8}(2x^2)^2 + o\left((2x^2)^2\right)$

$1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$\cos(\sqrt{2}x) = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}x)^2 + \frac{1}{24}(\sqrt{2}x)^4 + o\left((\sqrt{2}x)^4\right) =$

$1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$

DA CUI

$\sqrt{1+2x^2}\cos(\sqrt{2}x) = \left(1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right) =$

$1 - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) + \cancel{x^2} - x^4 + o(x^4) - \frac{x^4}{2} + o(x^4) =$

$1 + \left(\frac{1}{6} - 1 - \frac{1}{2}\right)x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$

PER QUANTO CONCERNE IL DENOMINATORE (A dipende dalla fila)

$x(\sin(Ax) - Ax) = x\left(Ax - \frac{(Ax)^3}{6} + o(Ax)^3 - Ax\right) = x\left(-\frac{A^3}{6}x^3 + o(x^3)\right) =$

$-\frac{A^3}{6}x^4 + o(x^4)$

IN DEFINITIVA

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^2}\cos(\sqrt{2}x)-1}{x(\sin(Ax)-Ax)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{-\frac{A^3}{6}x^4+o(x^4)} = \frac{8}{A^3}$$

6) $$f(x) = \frac{1}{4\arctan(x)+4\arctan(1-x)-\pi}$$

Conviene considerare $g(x) = 4\arctan(x)+4\arctan(1-x)-\pi$, di modo che $f(x) = \frac{1}{g(x)}$. Studiamo prima $g(x)$.

- DOMINIO DI $g(x) = \mathbb{R}$
- $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 4\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}(x) + 4\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}(1-x) - \pi = \quad (y=1-x)$$

$$4\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}(x) + 4\lim_{y\to+\infty}\operatorname{arctg}(y) - \pi = 4\left(-\frac{\pi}{2}\right)+4\left(\frac{\pi}{2}\right)-\pi = -\pi$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 4\left(\frac{\pi}{2}\right)+4\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\pi = -\pi$$

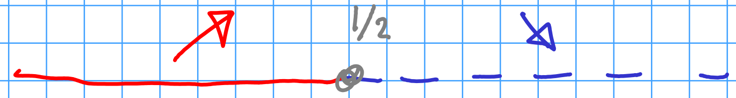
· SEGNO di $g(x)$ — Non è chiaro, ci torniamo dopo

· DERIVATA DI $g(x)$

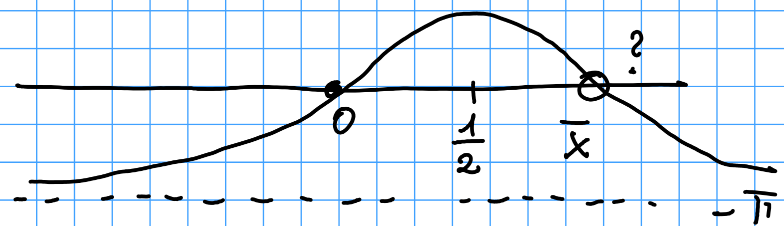
$$g'(x) = \frac{4}{1+x^2} + \frac{4}{1+(1-x)^2}\cdot(-1) = \frac{4}{1+x^2} - \frac{4}{1+(1-x)^2} =$$

$$4\,\frac{\cancel{1}+(1-x)^2 - \cancel{1} - x^2}{(1+x^2)(1+(1-x)^2)} = \frac{4\,(1-2x)}{(1+x^2)(1+(1-x)^2)}.$$

Allora $g'(x)=0 \iff x = 1/2$; inoltre $g'(x)>0$ per $x<1/2$ mentre $g'(x)<0$ per $x>1/2$:



IL GRAFICO DI $g(x)$ è quindi:



(è chiaro che $g(0)=0$). Si vede però che

$g(1) = 4\,\mathrm{arctg}(1) + 4\,\mathrm{arctg}(0) - \pi = 4\frac{\pi}{4} - \pi = 0$ e quindi gli zeri di g sono esattamente $x=0$ e $x=1$ (il punto $\bar{x}$ è 1). In particolare

SEGNO DI g: $g(x)>0 \iff 0<x<1$ (e $g(x)<0$ fuori $[0,1]$).

TORNANDO A f si ha:

DOMINIO DI f: $g(x)\neq 0$ cioè $x\neq 0$ e $x = 1$

LIMITI

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

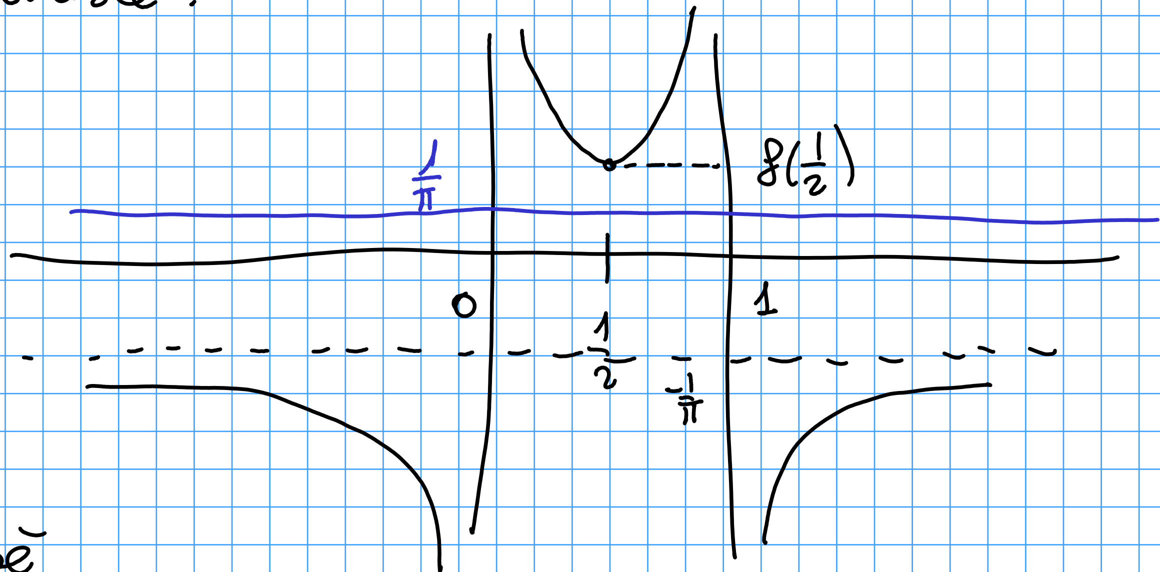
SEGNO

lo stesso di $g(x)$

MONOTONIA

f cresce $\Longleftrightarrow$ g decresce.

Dunque il grafico di $f(x)$ è



Notiamo che $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(8\,\text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \pi\right)^{-1}$

Dico che $\frac{1}{\pi} < f\left(\frac{1}{2}\right)$; infatti

questo equivale a $\pi > g(1/2)$ cioè

$\pi > 8\,\text{arctg}(1/2) - \pi \Longleftrightarrow 2\pi > 8\,\text{arctg}(1/2) \Longleftrightarrow \frac{\pi}{4} > \text{arctg}(1/2) \Longleftrightarrow$

$\text{arctg}(1) > \text{arctg}(1/2)$ e questo è vero perché $\text{arctg}(x)$ è crescente.

DUNQUE $f(x) = 1/\pi$ **NON HA NESSUNA SOLUZIONE**