Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 13 settembre 2010

1. Siano $f(x) = e^{-1/x^2}$, $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ e $h(x) = \sqrt{4+x^2} - 2$.
   Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

   (a) $f(x) = O(g(x))$; (b) $g(x) = o(h(x))$; (c) $h(x) = o(g(x))$; (d) $g(x) = O(f(x))$.

2. Se $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^4 - 2x^2 + 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ?
   Nota: chiamiamo "estremo relativo" un numero che sia o di massimo relativo o di minimo relativo. (2/-0,5 p.).

   (a) f ha due estremi relativi e un punto stazionario; (b) f ha due estremi relativi e due punti stazionari;
   (c) f ha due estremi relativi e tre punti stazionari; (d) f ha tre estremi relativi e un punto stazionario;
   (e) f ha tre estremi relativi e due punti stazionari; (f) f ha tre estremi relativi e tre punti stazionari .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^n \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{5n+6}{2n+7}} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+e^{8x}} - 2e^x}{\tan(x)\ln(1-2x)}$$

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = \dfrac{y^2}{1+y^2}$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)

   (a) ha un'unica soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 1$; (b) tutte le sue soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$;
   (c) tutte le sue soluzioni sono crescenti; (d) tutte le sue soluzioni sono illimitate.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

   (a) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1]$ e converge per le stesse x.

   (b) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1]$.

   (c) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge per le stesse x.

   (d) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in]-1,1]$.

   (e) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1[$.

   (f) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge per le stesse x.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+1)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2+4} - 3x - 2, \qquad (\text{per } x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);

   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (1 p.);

   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (3 p.);

   (d) si dica per quali y_0 la soluzione y è strettamente decrescente su $[0, +\infty[$ (1 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 13 SETTEMBRE 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

1. (a) SI NO (b) SI NO (c) SI NO (d) SI NO
2. a b c d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI
3. (a) $1/e$ (b) $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$
5. (a) SI NO (b) SI NO (c) SI NO (d) SI NO
6. a b c d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI
7. $1/2$ NON ESISTE

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

(1) $f(x) = e^{-1/x^2} = o(x^k)$ qualunque k $\left(\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = \lim_{y \to +\infty} e^{-y} y^{\frac{k}{2}} = 0 \right)$

$g(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = x^2 + o(x^2) - x - o(x) = -x + o(x)$

$h(x) = \sqrt{4+x^2} - 2 = 2\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} - 1\right) = 2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$ DUNQUE

(a) $f = o(g)$ $\boxed{SI}$ $(k=1)$

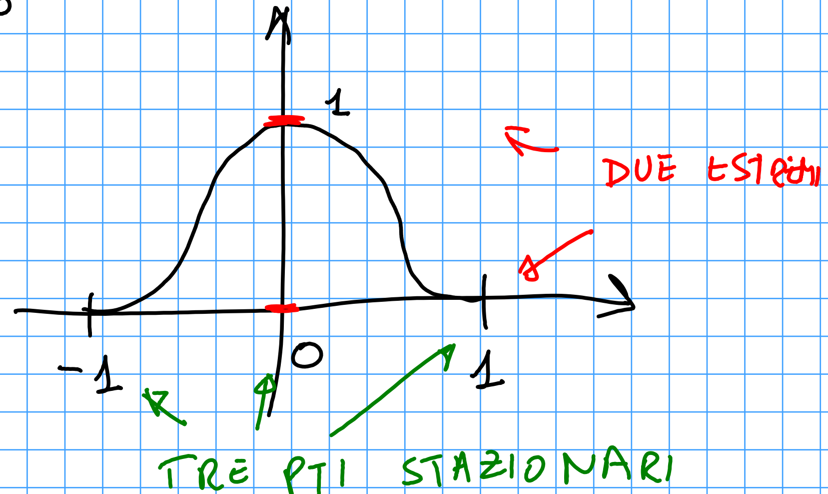
(b) $g = o(h)$ $\boxed{NO}$ $-x = o\left(\frac{x^2}{4}\right)$ È FALSO

(c) $h = o(g)$ $\boxed{SI}$ $\frac{x^2}{4} = o(-x)$ È VERA

(d) $g = O(f)$ $\boxed{NO}$ $\left|\frac{-x}{e^{-1/x^2}}\right| \to +\infty$

(2) Il grafico della funzione è rappresentato a destra →

f ha due estremi (0 e 1) $\Rightarrow$ $\cancel{\boxed{\phi}}$
~~f~~ ha tre pti staz. $(-1, 0, 1)$



(3) (a) $\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{2}{2n+5}\right)} = e^{n\left(-\frac{2}{2n+5} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{2n}{2n+5} + o(1)} \to e^{-1}$

(b) $n\left(\sqrt[n]{\frac{5n+6}{2n+7}}-1\right) = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{5}{2}+o(1)\right)}-1\right) = n\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{5}{2}+o(1)\right)(1+o(1))\right)$

$= \ln\left(\frac{5}{2}+o(1)\right)(1+o(1)) \longrightarrow \ln\left(\frac{5}{2}\right)$

(4) • $\sqrt{3+e^{8x}} = \sqrt{3+1+8x+\frac{1}{2}(8x)^2+o(x^2)} =$

$\sqrt{4+8x+32x^2+o(x^2)} = 2\sqrt{1+2x+8x^2+o(x^2)} = 2\left(\frac{1}{2}(2x+8x^2+o(x^2)) - \frac{1}{8}(2x+o\right.$

$= 2\left[1+\frac{1}{2}\left(2x+8x^2+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}(2x+o(x))^2+o\left(O(x)^2\right)\right] =$

$= 2\left[1+x+\frac{7}{2}x^2+o(x^2)\right]$

• $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

• $\operatorname{tg}(x)\ln(1-2x) = (x+o(x))(-2x+o(x)) = -2x^2+o(x^2)$

DUNQUE

$$\frac{\sqrt{3+e^{8x}}-2e^x}{\operatorname{tg}(x)\ln(1-2x)} = \frac{2\left[\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{7}{2}x^2+o(x^2)-\cancel{1}-\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}{-2x^2+o(x^2)} = \frac{3x^2+o(x^2)}{-x^2+o(x^2)}$$

-3

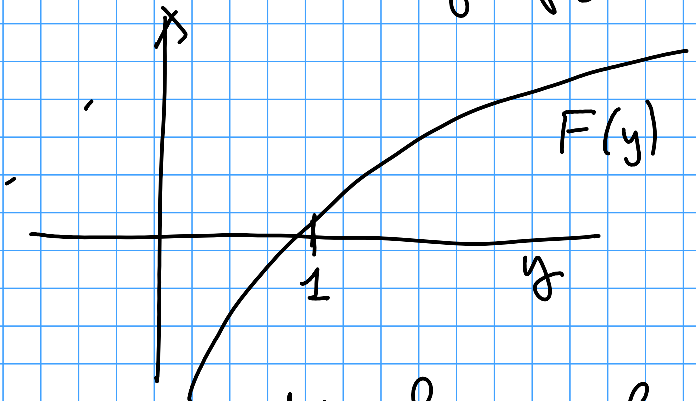
(5) $$y' = \frac{y^2}{1+y^2}$$

Intanto c'è la sol. costante $y(x) = 0$. Oltre a questa c'è la formula $F(y(x)) = F(y_0) + x - x_0$ dove

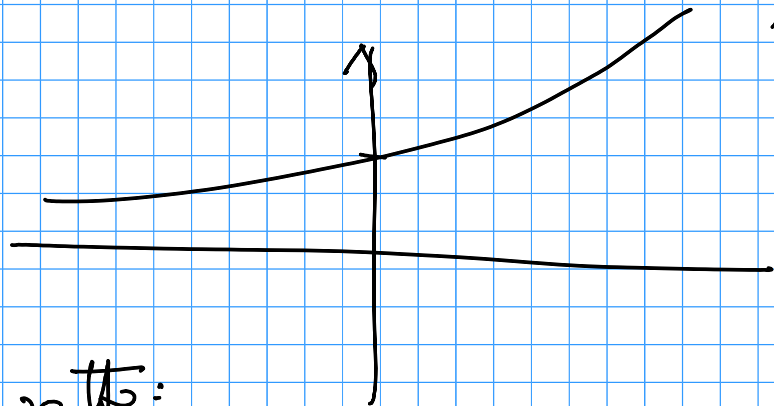
$$F(y) = \int_1^y \frac{1+t^2}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t} + t\right]_1^y = y - \frac{1}{y} \quad (y>0)$$

(per le $y_0 > 0$; per le $y_0 < 0$ si usa una F analoga)

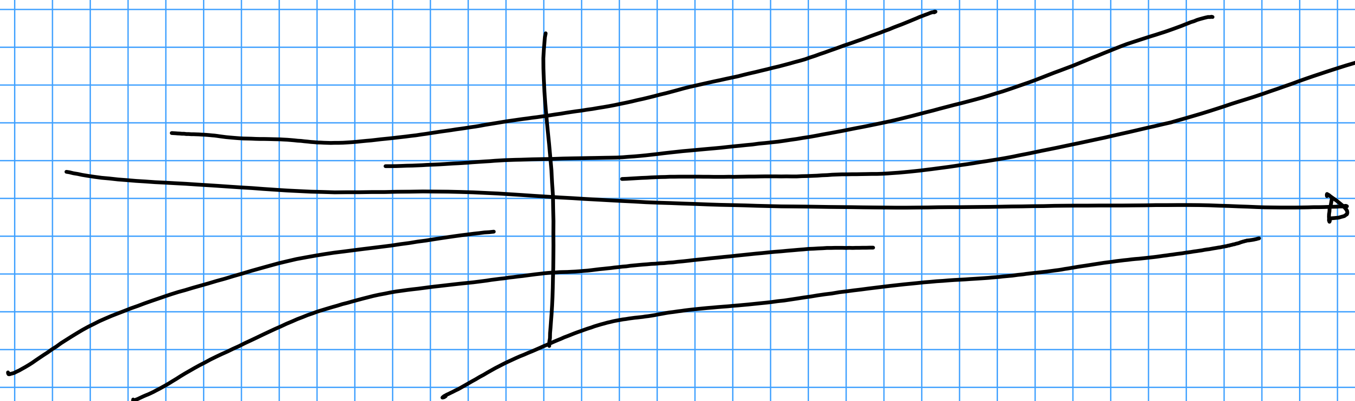
Dato che il grafico di F è come sotto:



$\Rightarrow$ l'inverso di F



e quindi le sol. sono (+/−) come sotto:



$\Rightarrow$

(a) $\boxed{\text{SI}}$

(b) $\boxed{\text{SI}}$

(c) $\boxed{\text{SI}}$

(d) $\boxed{\text{NO}}$

(6) $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ è una serie di potenze ; $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\sin(1/n)} \to 1$

dunque la serie conv. ass. per $-1 < x < 1$. e non conv. per $|x| > 1$. Se $x = \pm 1$ $|a_n| = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \simeq \frac{1}{n} \Rightarrow$ la serie

$\sum_n |a_n|$ diverge (<u>no conv.</u> ass. per $x = \pm 1$)

Se $x = 1 \Rightarrow |a_n| = a_n \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n a_n$ diverge

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n (-1)^n a_n$ conv. per Leibniz

dato che $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ decresce. $\Longrightarrow$ $\cancel{\boxed{e}}$

(7) Usando la riduzione in fratti semplici si vede che

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left[0 - 0 - 0 + 1\right] = \frac{1}{2}$$

(8) $\quad y' = \dfrac{2x}{x^2+4} - 3x - 2 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad y(0) = y_0$

- $y(x) = \dfrac{(x^2+4)}{4}\left\{ y_0 - \displaystyle\int_0^x \dfrac{(3t+2)}{t^2+4}\, 4\, dt \right\} =$

$(x^2+4)\left\{ \dfrac{y_0}{4} - \displaystyle\int_0^x \left(\dfrac{3}{2}\, \dfrac{2t}{t^2+4} + \dfrac{1}{2}\, \dfrac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} \right) dt \right\}$

$(x^2+4)\left\{ \dfrac{y_0}{4} - \dfrac{3}{2}\ln(x^2+4) + \dfrac{3}{2}\ln(4) - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right) \right\} =$

$(x^2+4)\left\{ c - \dfrac{3}{2}\ln(x^2+4) - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right) \right\}$ dove $c = \dfrac{y_0}{4} + 3\ln(2)$

- $\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty \;;\; \lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$

- Posto $F(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+4} - 3x - 2$ $\quad$ ($\Rightarrow$ l'eq. diventa $y' = F(x,y)$)

si ha $F(x,y) = 0 \iff x \neq 0$ e $y = \dfrac{(3x+2)(x^2+4)}{2x} =: g(x)$

($F(x,y) > 0 \iff (x > 0$ e $y > g(x))$ oppure $(x < 0$ e $y < g(x))$)

Studiamo $g(x)$ per $x \neq 0$. $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty$

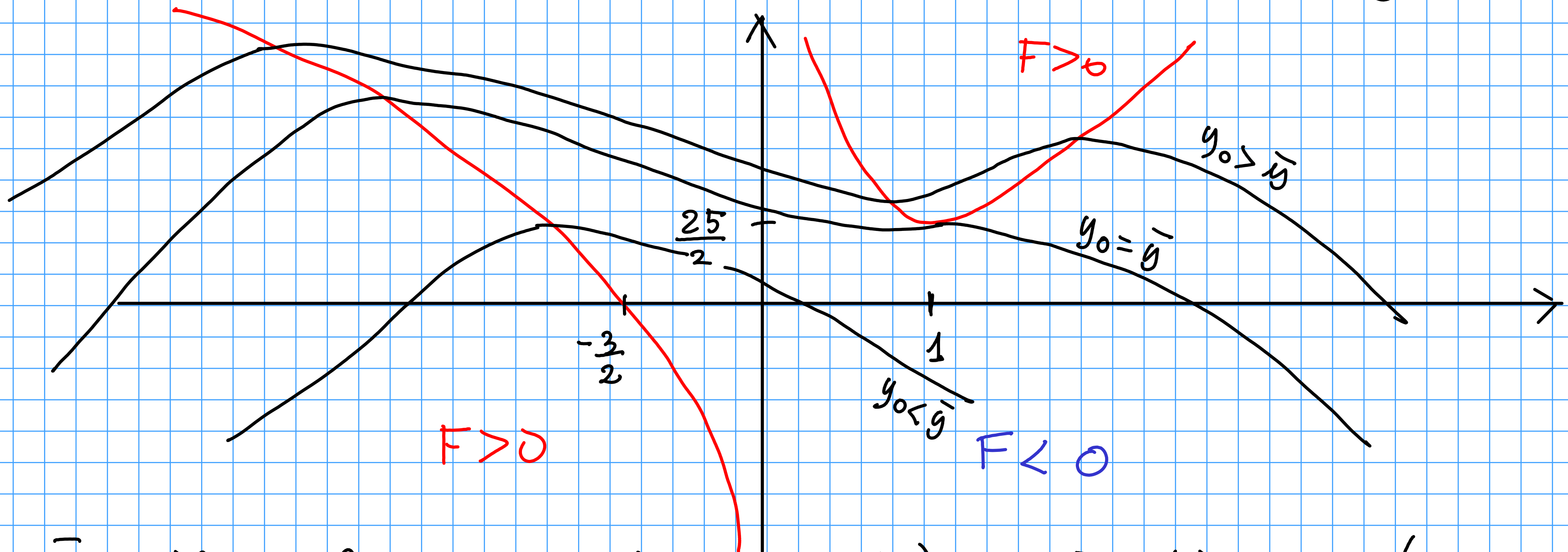
$$\lim_{x\to 0^+/0^-} g(x) = +\infty / -\infty .$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{[3(x^2+4)+(3x+2)2x]x-(3x+2)(x^2+4)}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2x^2}\left(\cancel{3x^3}+\cancel{12x}+6x^3+4x^2-\cancel{3x^3}-2x^2-\cancel{12x}-8\right) =$$

$$\frac{1}{2x^2}\left(6x^3+2x^2-8\right) \underset{\text{Ruffini}}{=} (x-1)\underset{\Delta<0 \Rightarrow \text{sempre} >0}{(6x^2+8x+8)}$$

l'unico pto x in cui $g'(x)=0$ è $x=1$ e $g(1)=\frac{25}{2}$



$\bar{y}$ è il valore per cui $y(1) = \frac{25}{2} \iff \frac{25}{2} = 5\left(c - \frac{3}{2}\ln(5) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$\iff 5 = 2\left(c - \frac{3}{2}\ln(5) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \iff c = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\ln(5) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \iff$

$$\bar{y} = 4c - 12\ln(2) = \boxed{10 + 6\ln(5) + \operatorname{atan}\left(\frac{1}{2}\right) - 12\ln(2)}$$

(d) È chiaro dai grafici che y è decrescente su $[0, +\infty[$ se e solo se $y_0 \leq \bar{y}$