Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell'8 settembre 2010

1. Siano $f(x) = e^{-1/x^2}$, $g(x) = \sqrt{4+x^2} - 2$ e $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$.
Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

(a) $f(x) = o(g(x))$; (b) $g(x) = O(h(x))$; (c) $h(x) = O(g(x))$; (d) $g(x) = O(f(x))$.

2. Se $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^4 - 2x^2 + 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ?
Nota: chiamiamo "estremo relativo" un numero che sia o di massimo relativo o di minimo relativo. (2/-0,5 p.).

(a) f ha un estremo relativo e un punto stazionario; (b) f ha due estremi relativi e un punto stazionario;
(c) f ha tre estremi relativi e un punto stazionario; (d) f ha due estremi relativi e due punti stazionari;
(e) f ha tre estremi relativi e due punti stazionari; (f) f ha ha tre estremi relativi e tre punti stazionari .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + 8^n + n!} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{3n+1}{n+1}} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+e^{4x}} - \sqrt{2}e^x}{\sin(x)\ln(1+2x)}$$

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = \dfrac{xy}{1+y^2}$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)

(a) ha un'unica soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = -1$; (b) tutte le sue soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$;
(c) tutte le sue soluzioni sono crescenti; (d) ha una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \sin(n^3)}{1+n+n^2+n^3} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

(a) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1]$ e converge per le stesse x.
(b) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1]$.
(c) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge per le stesse x.
(d) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in]-1,1]$.
(e) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1[$.
(f) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge per le stesse x.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x^2+x+1}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{x^2} + 1, \qquad \text{per } x > 0, \qquad y(1) = y_0.$$

(a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2,5 p.);
(b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.);
(c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);
(d) si dica per quali y_0 – se ce ne sono – l'equazione $y + 5 = 0$ ha due soluzioni in $]0, +\infty[$. (1 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DELL'8 SETTEMBRE 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

1. (a) ~~SI~~ NO (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) SI ~~NO~~

2. a | b | c | d | ~~e~~ | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI

3. (a) $+\infty$ (b) $\ln(3)$

5. (a) ~~SI~~ NO (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO

6. a | b | c | ~~d~~ | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI

7. $\frac{3}{4}\pi$ NON ESISTE

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

(1)

- $\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^k} \to 0$ pe qualunque k $\Rightarrow$ $f(x) = o(x^k)$ $\forall k$.

- $\sqrt{4+x^2} - 2 = 2\sqrt{1+(x/2)^2} - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) \Rightarrow g(x) = O(x^2)$

- $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = x^2 + o(x^2) - x - o(x) = -x + o(x)$

$\Rightarrow h(x) = O(x)$

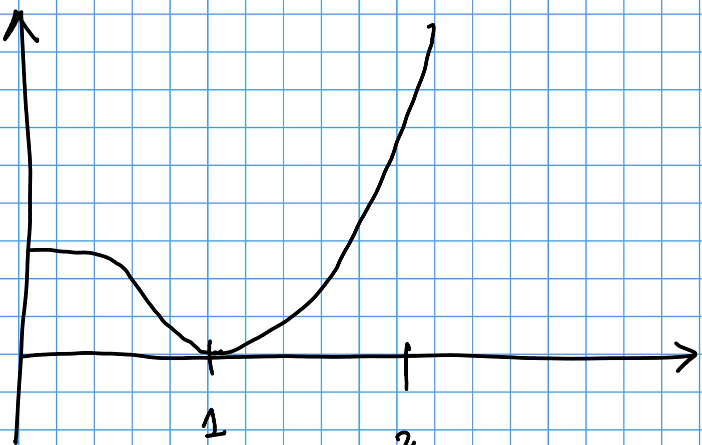
NE SEGUE:

(a) $f(x) = o(g(x))$ $\boxed{SI}$ (b) $g(x) = O(h(x))$ $\boxed{SI}$

(c) $h(x) = O(g(x))$ $\boxed{NO}$ (d) $g(x) = O(f(x))$ $\boxed{NO}$

(2)

$f(x)$ ha il grafico $\Rightarrow$



Dunque 0 2 sono punti di max rel. mentre 1 è di min.

I valori corrispondenti sono

$f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 9$

che danno TRE estremi relativi. Inoltre $x=0$ e $x=1$ sono i punti stazionari, che quindi risultano essere DUE $\Rightarrow$ $\boxed{e}$

(3)

(a) $\sqrt[n]{n^5+8^n+n!} = \sqrt[n]{n!}\,\sqrt[n]{\frac{n^5}{n!}+\frac{8^n}{n!}+1} = \sqrt[n]{n!}\,\sqrt[n]{1+o(1)} \to \boxed{+\infty}$

perché $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ (uso Cesaro) e $\sqrt[n]{1+o(1)} \to 1$.

(b) $n\left(\sqrt[n]{\frac{3n+1}{n+1}}-1\right) = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3n+1}{n+1}\right)}-1\right) = n\left(e^{\frac{\ln(3)+o(1)}{n}}-1\right)$

$= n\left(\frac{\ln(3)+o(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \longrightarrow \boxed{\ln(3)}$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+e^{4x}}-\sqrt{2}e^x}{\sin(x)\ln(1+2x)}$. Si ha (Taylor)

- $\sqrt{1+e^{4x}} = \sqrt{1+1+4x+\frac{1}{2}(4x)^2+o(x^2)} = \sqrt{2+4x+8x^2+o(x^2)} =$

$\sqrt{2}\sqrt{1+2x+4x^2+o(x^2)} = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(2x+4x^2+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}\left(2x+o(x)\right)^2+o(O(x^2)\right) =$

$\sqrt{2}\left(1+x+2x^2-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) = \sqrt{2}\left(1+x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right)$.

- $\sqrt{2}e^x = \sqrt{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$

$\sin(x)\ln(1+2x) = (x+o(x))(2x+o(x)) = 2x^2+o(x^2)$. DUNQUE

$$\frac{\sqrt{1+e^{4x}}-\sqrt{2}e^x}{\sin(x)\ln(1+2x)} = \sqrt{2}\,\frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)-\cancel{1}-\cancel{x}-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)} =$$

$$\sqrt{2}\,\frac{x^2+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)} \to \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

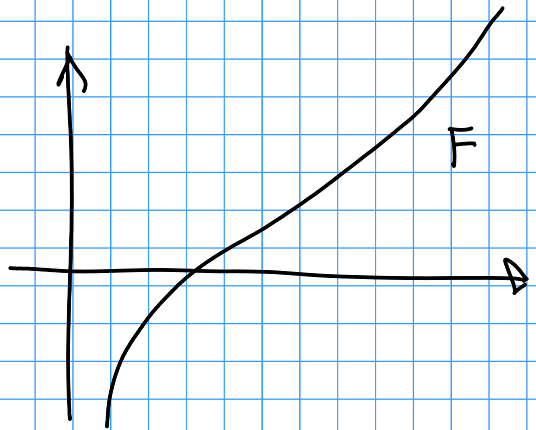
(5) Usando la formula risolutiva per le eq. a var. sep. si trova

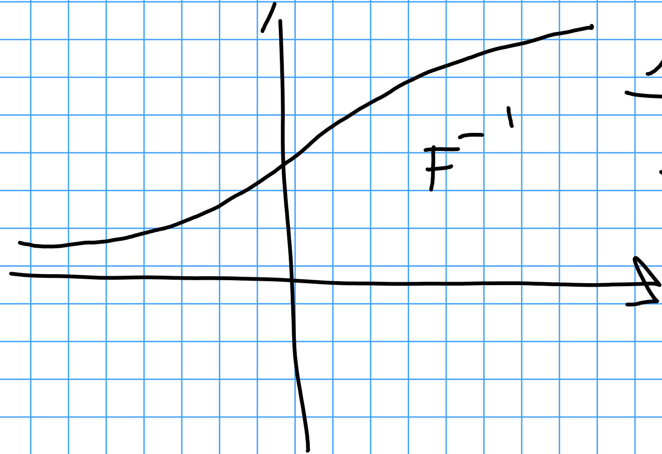
- $y(x)=0$ è l'unica sol costante.
- se $y_0>0$ esiste la sol. $y(x)$ con $y(x_0)=y_0$

data da $F(y(x)) - F(y_0) = \frac{x^2}{2}-\frac{x_0^2}{2}$ dove

$F(y) = \ln(y)+\frac{y^2}{2}$. Dato che $F:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è

bigettiva, come si vede dal grafico



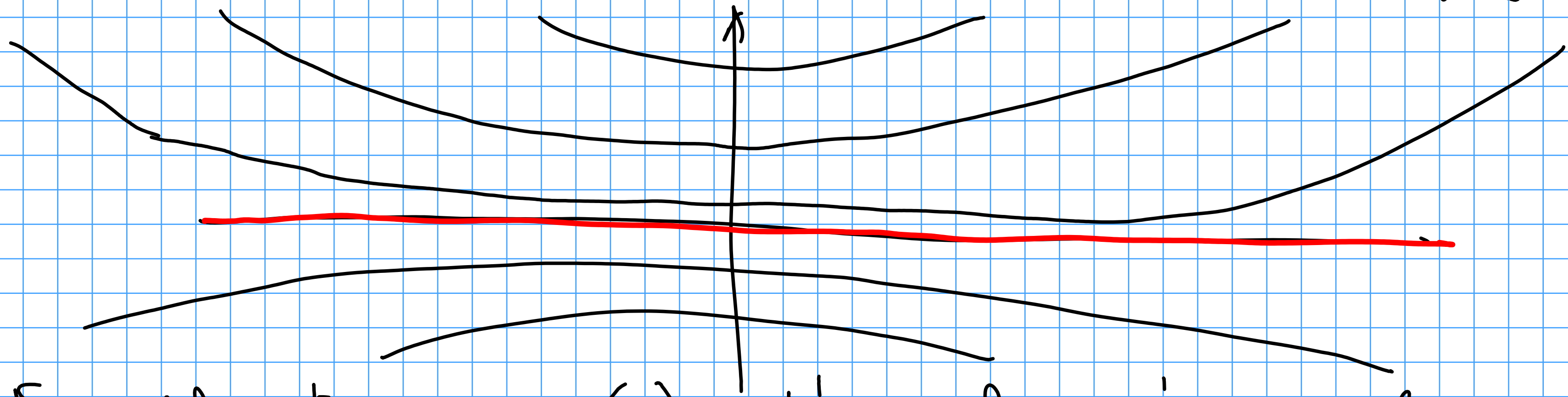


y è dunque definita su tutto $\mathbb{R}$ da

$$y(x) = F^{-1}\left(F(y_0) - \frac{x_0}{2} + \frac{x^2}{2}\right)$$

- Se $y_0 < 0$ si trova lo stesso risultato del caso $y_0 > 0$

. Si vede allora che le sol. hanno i grafici sotto:



In definitiva

(a) L'eq. ha un'unica sol. con $y(6) = -1$ $\boxed{SI}$

(b) tutte le sol. sono def. su $\mathbb{R}$ $\boxed{SI}$

(c) tutte le sol sono cresc. $\boxed{NO}$

(d) esiste una sol limitata $\boxed{SI}$ $(y(x) = 0)$

6) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, dove $a_n = (-1)^n \frac{n^2 + \sin(n^3)}{n^3+n^2+n+1}$

è una serie di potenze. Dato che:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \sqrt{1+o(1)} \to 1$, il raggio di conv. è $R=1$.

Dunque la serie conv. assolutamente per $-1<x<1$ e non conv. per $|x|>1$. Rimane da capire cosa succede per $x = \pm 1$. Se $|x|=1$ si ha $|a_n| = \frac{1}{n}(1+o(1)) \simeq \frac{1}{n}$, e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ (non conv. ass. per $x=\pm 1$). Per lo stesso motivo la serie diverge se $x=-1$ (in questo caso $a_n = |a_n| \simeq \frac{1}{n}$. Al contrario, se $x=1$ la serie è a segni alterni e converge per Leibniz (come si vede facilmente).

7) $$\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{x^3+x^2+x+1} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=1 \\ A+C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ -A+C=1 \\ A+C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1/2 \\ C=3/2 \\ A=1/2 \end{cases}$$ da cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 3\,\mathrm{arctg}(x)\right]_0^{+\infty} = \frac{3}{4}\pi$$

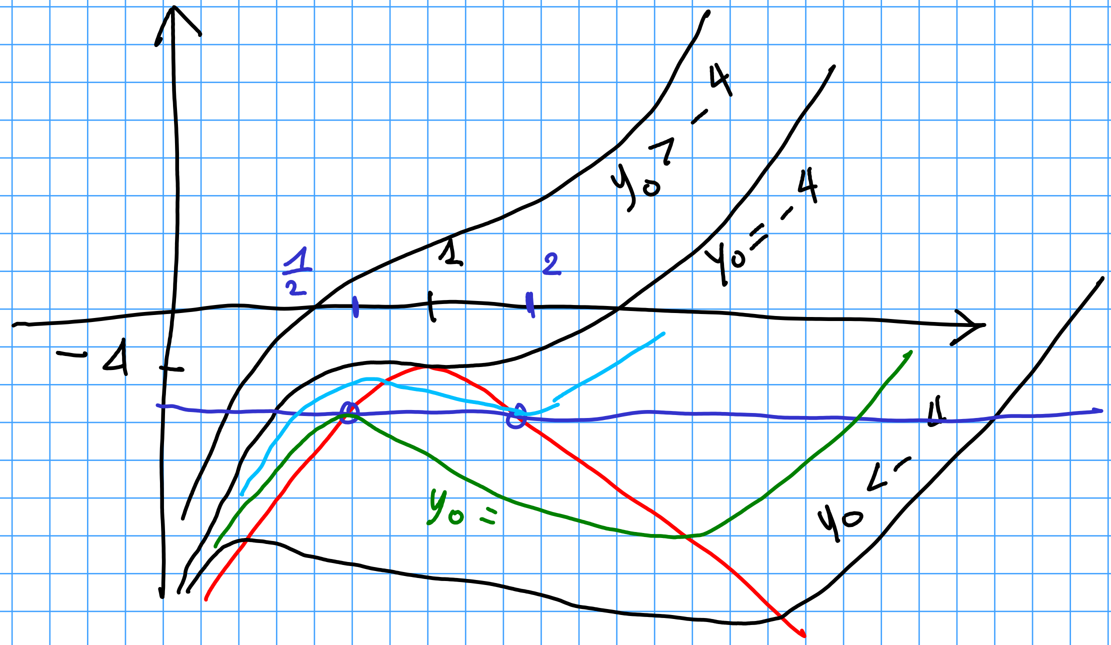
8) $y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{x^2} + 1 \quad , x>0 \qquad y(1) = y_0$. Allora

- $$y(x) = \sqrt{x}\left(y_0 + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{t^2}+1\right) dt\right) =$$
$$\sqrt{x}\left(y_0 + \left[\frac{t^{-3/2}}{-3/2} + \frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_1^x\right) = \sqrt{x}\left(y_0 - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{3} + 2\sqrt{x} - 2\right) =$$
$$\sqrt{x}\left(y_0 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}} + 2\sqrt{x}\right) = \left(y_0 - \frac{4}{3}\right)\sqrt{x} - \frac{2}{3}\frac{1}{x} + 2x$$

- $\lim_{x \to 0^+} y(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ $\quad (\forall y_0)$

- Posto $F(x,y) = \frac{y}{2x} + \frac{1}{x^2} + 1$ si ha $F(x,y) > 0 \iff$
$y > 2\left(\frac{1}{x} + x\right) =: g(x)$ $\left(\text{e analogamente } F(x,y) \underset{<}{=} 0 \iff y \underset{<}{=} g(x) \right)$

Disegnando il grafico di $g(x)$ (linea rossa) si possono individuare i comportamenti delle soluzioni al variare di y_0.



• Per il punto d) conviene trovare i punti in cui $g(x) = -5$: si vede facilmente che sono $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 2$

Si vede anche che le uniche y per cui ey attraverso DUE volte la retta $y = -5$ sono quelle in cui $y\left(\frac{1}{2}\right) = -5$ e $y(2) = -5$. Tali curve si realizzano per $y_0 = -\frac{14}{3}\sqrt{2}$ e $y_0 = \frac{-26}{3\sqrt{2}}$.