Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 19 luglio 2010 FILA A

1. Siano $f(x) = \sin(x^2)$, $g(x) = \sqrt{1+3x^2} - 1$ e $h(x) = 1 - \cos(x^2)$. Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

   (a) $f(x) = o(g(x))$; (b) $g(x) = O(h(x))$; (c) $f(x) = O(g(x))$; (d) $g(x) = O(f(x))$.

2. Se $f : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^4 - 2x^2 + 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.) Nota: chiamiamo "estremo relativo" un numero che sia o di massimo relativo o di minimo relativo.

   (a) f non ha estremi relativi; (b) f ha 1 estremo relativo;
   (c) f ha 2 estremi relativi; (d) f ha 3 estremi relativi;
   (e) f ha 4 estremi relativi; (f) f ha 5 estremi relativi .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + 8^n + 5^n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{5n} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos(4x)} - \sqrt{2}e^{-2x^2}}{\sin(x^2)(1-\cos(x))}$$

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = y^3$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)

   (a) ha un'unica soluzione locale $y(x)$ tale che $y(0) = -1$; (b) ha una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $y(1) = 1$;
   (c) tutte le sue soluzioni sono crescenti; (d) ha una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \sin(n^4)}{1+n^4} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

   (a) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1]$ e converge per le stesse x.

   (b) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1]$.

   (c) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge per le stesse x.

   (d) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in]-1, 1]$.

   (e) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1[$.

   (f) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge per le stesse x.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_5^{+\infty} \frac{x+2}{x^3 + x^2 + x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 4} - \frac{8}{x}, \qquad \text{per } x \in]0, 2[, \qquad y(1) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2,5 p.);

   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to 2^-$ (2 p.);

   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);

   (d) si dica per quali y_0 – se ce ne sono – la soluzione y è strettamente decrescente su $[0, 2]$ (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 19 luglio 2010 FILA B

1. Siano $h(x) = \sin(x^2)$, $f(x) = \sqrt{1+3x^2} - 1$ e $g(x) = 1 - \cos(x^2)$. Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

(a) $f(x) = O(h(x))$; (b) $h(x) = o(f(x))$; (c) $f(x) = O(g(x))$; (d) $h(x) = O(f(x))$.

2. Se $f : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^4 - 2x^2 + 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.) Nota: chiamiamo "estremo relativo" un numero che sia o di massimo relativo o di minimo relativo.

(a) f non ha estremi relativi; (b) f ha 3 estremi relativi;
(c) f ha 1 estremo relativo; (d) f ha 4 estremi relativi;
(e) f ha 2 estremi relativi; (f) f ha 5 estremi relativi .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + 4^n + 9^n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{9n} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos(4x)} - \sqrt{2}e^{-2x^2}}{\sin(x^2)(1-\cos(x))}$$

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = y^3$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)

(a) ha una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $y(1) = 1$; (b) tutte le sue soluzioni sono crescenti;
(c) ha una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata; (d) ha un'unica soluzione locale $y(x)$ tale che $y(0) = -1$.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \sin(n^4)}{1+n^4} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

(a) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge per le stesse x.

(b) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1]$ e converge per le stesse x.

(c) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1]$.

(d) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge per le stesse x.

(e) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in]-1,1]$.

(f) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1[$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_4^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x^2+x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2-4} - \frac{8}{x}, \qquad \text{per } x \in]0,2[, \qquad y(1) = y_0.$$

(a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2,5 p.);

(b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to 2^-$ (2 p.);

(c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);

(d) si dica per quali y_0 – se ce ne sono – la soluzione y è strettamente decrescente su $[0,2]$ (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 19 luglio 2010 FILA C

1. Siano $g(x) = \sin(x^2)$, $h(x) = \sqrt{1+3x^2} - 1$ e $f(x) = 1 - \cos(x^2)$. Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

   (a) $g(x) = O(h(x))$; (b) $h(x) = O(g(x))$; (c) $g(x) = o(h(x))$; (d) $h(x) = O(f(x))$.

2. Se $f : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^4 - 2x^2 + 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.) Nota: chiamiamo "estremo relativo" un numero che sia o di massimo relativo o di minimo relativo.

   (a) f ha 1 estremo relativo; (b) f ha 2 estremi relativi;
   (c) f ha 3 estremi relativi; (d) f ha 4 estremi relativi;
   (e) f ha 5 estremi relativi; (f) f non ha estremi relativi .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + 7^n + 3^n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{3n} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos(4x)} - \sqrt{2}e^{-2x^2}}{\sin(x^2)(1-\cos(x))}$$

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = y^3$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)

   (a) tutte le sue soluzioni sono crescenti; (b) ha una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata;
   (c) ha un'unica soluzione locale $y(x)$ tale che $y(0) = -1$; (d) ha una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $y(1) = 1$.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \sin(n^4)}{1+n^4} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

   (a) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in]-1, 1]$.

   (b) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1[$.

   (c) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge per le stesse x.

   (d) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1]$ e converge per le stesse x.

   (e) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1]$.

   (f) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge per le stesse x.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_3^{+\infty} \frac{x+2}{x^3 + x^2 + x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 4} - \frac{8}{x}, \qquad \text{per } x \in]0, 2[, \qquad y(1) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2,5 p.);

   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to 2^-$ (2 p.);

   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);

   (d) si dica per quali y_0 – se ce ne sono – la soluzione y è strettamente decrescente su $[0, 2]$ (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 19 luglio 2010 FILA D

1. Siano $h(x) = \sin(x^2)$, $g(x) = \sqrt{1+3x^2} - 1$ e $f(x) = 1 - \cos(x^2)$. Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

   (a) $g(x) = O(h(x))$; (b) $h(x) = o(g(x))$; (c) $g(x) = O(f(x))$; (d) $h(x) = O(g(x))$.

2. Se $f : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^4 - 2x^2 + 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.) Nota: chiamiamo "estremo relativo" un numero che sia o di massimo relativo o di minimo relativo.

   (a) f ha 1 estremo relativo; (b) f ha 4 estremi relativi;
   (c) f ha 2 estremi relativi; (d) f ha 5 estremi relativi;
   (e) f ha 3 estremi relativi; (f) f non ha estremi relativi .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + 5^n + 6^n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{6n} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos(4x)} - \sqrt{2}e^{-2x^2}}{\sin(x^2)(1-\cos(x))}$$

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = y^3$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)

   (a) ha una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata; (b) ha un'unica soluzione locale $y(x)$ tale che $y(0) = -1$;
   (c) ha una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $y(1) = 1$; (d) tutte le sue soluzioni sono crescenti.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \sin(n^4)}{1+n^4} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

   (a) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge per le stesse x.
   (b) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in]-1, 1]$.
   (c) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1[$.
   (d) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge per le stesse x.
   (e) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1]$ e converge per le stesse x.
   (f) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1]$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+2}{x^3 + x^2 + x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 4} - \frac{8}{x}, \qquad \text{per } x \in]0, 2[, \qquad y(1) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2,5 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to 2^-$ (2 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);
   (d) si dica per quali y_0 – se ce ne sono – la soluzione y è strettamente decrescente su $[0, 2]$ (1 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 19 LUGLIO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: A

1. (a) SI ~~NO~~ (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) ~~SI~~ NO

2. a b ~~c~~ d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

3. (a) 8 (b) $+\infty$

5. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO

6. ~~a~~ b c d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

7. $\ln\left(\frac{31}{25}\right)$ NON ESISTE

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 19 LUGLIO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	B

1. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO

2. a b c d ~~e~~ f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

3. (a) 9 (b) $+\infty$

5. (a) SI ~~NO~~ (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) ~~SI~~ NO

6. a ~~b~~ c d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

7. $\ln\left(\frac{21}{16}\right)$ NON ESISTE

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 19 LUGLIO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	C

1. (a) SI NO (b) SI NO (c) SI NO (d) SI NO
2. a b c d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI
3. (a) 7 (b) $+\infty$
5. (a) SI NO (b) SI NO (c) SI NO (d) SI NO
6. a b c d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI
7. $\ln\left(\frac{13}{9}\right)$ NON ESISTE

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 19 LUGLIO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	D

1. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO
2. a b ~~c~~ d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI
3. (a) 6 (b) $+\infty$
5. (a) ~~SI~~ NO (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) SI ~~NO~~
6. a b c d ~~e~~ f NESSUNA DELLE PRECEDENTI
7. $\ln\left(\frac{7}{4}\right)$ NON ESISTE

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

(1) Si ha (per $x \to 0$)

$\sin(x^2) \simeq x^2$

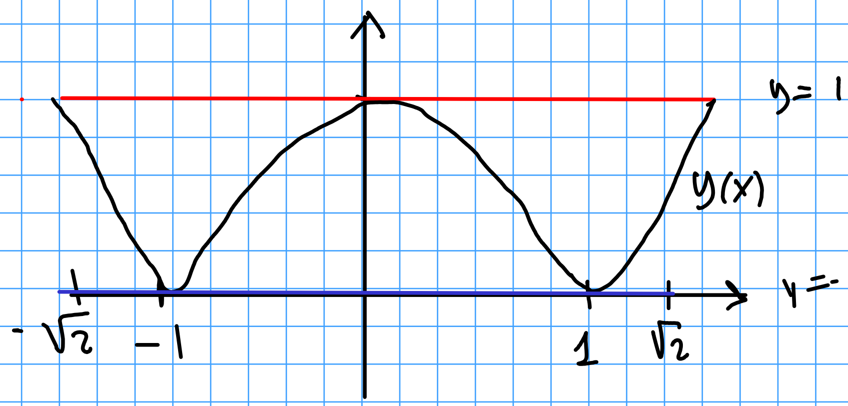
$\sqrt{1+3x^2} - 1 \simeq \frac{3}{2}x^2$

$1 - \cos(x^2) \simeq \frac{x^4}{2}$

E QUINDI:

- $\sin(x^2) = o\left(\sqrt{1+3x^2} - 1\right)$ $\boxed{\text{NO}}$
- $\sqrt{1+3x^2} - 1 = o\left(1 - \cos(x^2)\right)$ $\boxed{\text{NO}}$
- $\sin(x^2) = O\left(\sqrt{1+3x^2} - 1\right)$ $\boxed{\text{SI}}$
- $\sqrt{1+3x^2} - 1 = O\left(\sin(x^2)\right)$ $\boxed{\text{SI}}$

(2) $f : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Un facile studio di funzione permette di disegnare il grafico di f:



Allora f ha solo $\boxed{\text{DUE}}$ estremi rel., cioè il valore massimo ($y = 1$) e il valore minimo $y = 0$

(3) (a) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + A^n + B^n} = (\text{se } 1 < B < A)$$

$$A \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\underbrace{\frac{n^5}{A^n}}_{\to 0} + 1 + \underbrace{\left(\frac{B}{A}\right)^n}_{\to 0}} = A \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + o(1)} = \boxed{A}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{An} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{\ln(nA)}{n}} - 1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\ln(nA)}{n} + o\left(\frac{\ln(nA)}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(nA) + o(\ln(nA)) = \boxed{+\infty}$$

(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos(4x)} - \sqrt{2}\, e^{-2x^2}}{\sin(x^2)(1-\cos(x))} = (*)$. Allora

- $\sqrt{1+\cos(4x)} = \sqrt{1+1-\frac{(4x)^2}{2}+\frac{(4x)^4}{24}+o(x^4)} = \sqrt{2-8x^2+\frac{32}{3}x^4+o(x^4)}$

$= \sqrt{2}\left(1-4x^2+\frac{16}{3}x^4+o(x^4)\right)^{1/2} =$

$\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(-4x^2+\frac{16}{3}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{8}\left(-4x^2+o(x^2)\right)^2+o\left(O(x^2)^2\right)\right) =$

$\sqrt{2}\left(1-2x^2+\frac{8}{3}x^4+o(x^4)-\frac{16}{8}x^4+o(x^4)+o(x^4)\right) = \sqrt{2}\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)$

- $e^{-2x^2} = 1-2x^2+\frac{4x^4}{2}+o(x^4) = 1-2x^2+2x^4+o(x^2)$

- $\sin(x^2) = x^2+o(x^2)$; $1-\cos(x) = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$ DUNQUE

$(*) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)-\sqrt{2}\left(1-2x^2+2x^4+o(x^4)\right)}{(x^2+o(x^2))(\frac{x^2}{2}+o(x^2))} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}-2\right)x^4+o(x^4)}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}\left(-\frac{4}{3}\right)x^4}{\frac{x^4}{2}} = \boxed{-\frac{8}{3}\sqrt{2}}$

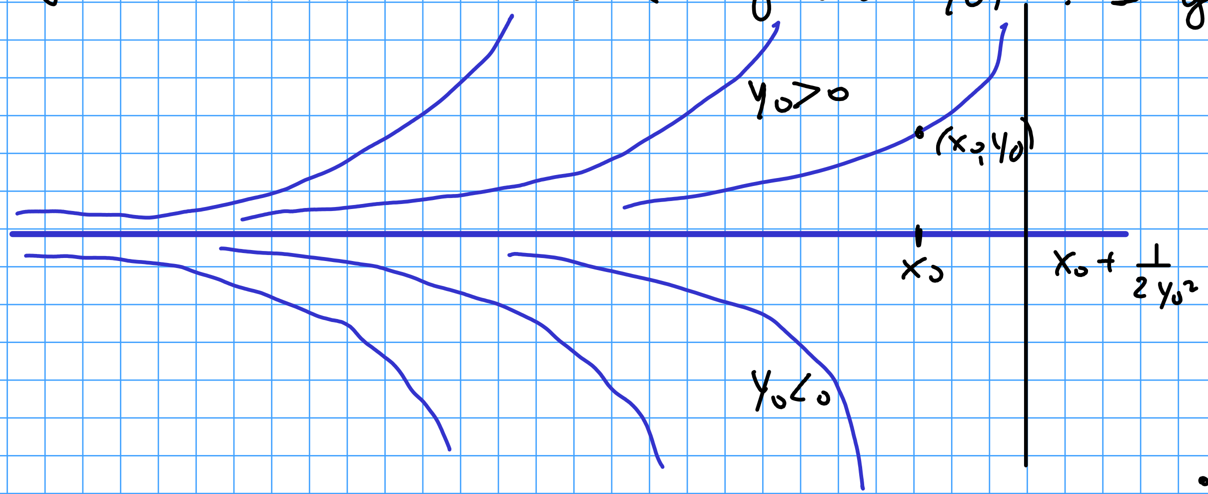
(5) L'equazione $y' = y^3$ è a variabili separabili. L'unica sol. costante è $y(x)=0$. Le sol. non costanti si trovano da:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{s^3} = x - x_0 \iff -\frac{1}{2s^2}\Big|_{y_0}^{y(x)} = x - x_0 \iff \frac{1}{2y_0^2} - \frac{1}{2y(x)^2} = x - x_0$$

$$\iff \frac{1}{y(x)^2} = \frac{1}{y_0^2} - 2(x-x_0) \iff y(x) = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{y_0^2} - 2(x-x_0)\right)^{-1}}$$

dove il $\pm$ va scelto in accordo con il segno di y_0 e dove la formula vale fino a quando l'argomento della radice è maggiore o uguale a zero, cioè per $x \leq x_0 + \frac{1}{2y_0^2}$.

Si vede facilmente che, se $x \to x_0 + \frac{1}{2y_0^2}^-$ allora $y(x) \to \pm\infty$ (+/- a seconda del segno di y_0). I grafici delle $y(x)$ sono:



Allora $y(x)$

- $\boxed{\text{HA}}$ un'unica sol. con $y(0)=-1$
- $\boxed{\text{NON HA}}$ sol. su tutto $\mathbb{R}$ con $y(1)=1$
- $\boxed{\text{NON HA}}$ tutte sol. crescenti
- $\boxed{\text{HA}}$ una sol. limitata ($y=0$)

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+\sin(n)}{n^4} x^n$ È una serie di potenze il cui raggio è il reciproco di

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+\sin(n^4)}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \sqrt[n]{1+o(1)} = 1 \quad \left(= \frac{1}{R}\right)$$

e quindi la serie converge ass. se $-1 < x < 1$ e non converge se $|x| > 1$. Rimane da capire cosa fa la serie se $x = \pm 1$. Per $x = 1$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+\sin(n^4)}{n^4}$

e per $x = -1$ diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+\sin(n^4)}{n^4}$. In entrambi i casi il modulo del termine generale è

$$|a_n| = \frac{n^2+\sin(n^4)}{n^4} = \frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right) \simeq \frac{1}{n^2}.$$

Dunque, per il criterio del confronto asintotico la serie converge assolutamente <u>anche</u> per $x = \pm 1$. In definitiva

$$\boxed{\text{la serie converge assolutamente se e solo se } x \in [-1, 1] \text{ e converge per le stesse } x}$$

(7) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3+x^2+x}\,dx = (*)$ $\qquad \displaystyle\frac{x+2}{x^3+x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$

$$\frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx}{x^3+x^2+x} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+C=1 \\ A=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=-1 \end{cases}$$

e allora

$$(*) = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx = \ln\left|\frac{x^2}{x^2+x+1}\right| + c$$

da cui

$$\int_A^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x^2+x}\,dx = -\ln\frac{A^2}{A^2+A+1} = \ln\left(1+\frac{1}{A}+\frac{1}{A^2}\right)$$

(A dipende dalla fila)

8) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-4} - \dfrac{8}{x} \qquad 0 < x < 2 \qquad y(1) = y_0$

(a) $a(x) = \dfrac{2x}{x^2-4} \Rightarrow A(x) = \int_1^x \dfrac{2t}{t^2-4}\,dt = \ln|t^2-4|\Big|_1^x = \ln\dfrac{4-x^2}{3}$

$$y(x) = \frac{4-x^2}{3}\left\{ y_0 - \int_1^x \frac{3}{4-t^2}\,\frac{8}{t}\,dt \right\} = (4-x^2)\left\{ \frac{y_0}{3} + \int_1^x \frac{8}{(t^2-4)t}\,dt \right\}$$

$$= (4-x^2)\left\{ \frac{y_0}{3} + \int_1^x \left(\frac{1}{t-2} + \frac{1}{t+2} - \frac{2}{t} \right) dt \right\} =$$

$$(4-x^2)\left\{ \frac{y_0}{3} + \ln\left|\frac{t^2-4}{t}\right|\Bigg|_1^x \right\} = \boxed{(4-x^2)\left\{ c + \ln\left(\frac{4-x^2}{x^2}\right) \right\}}$$

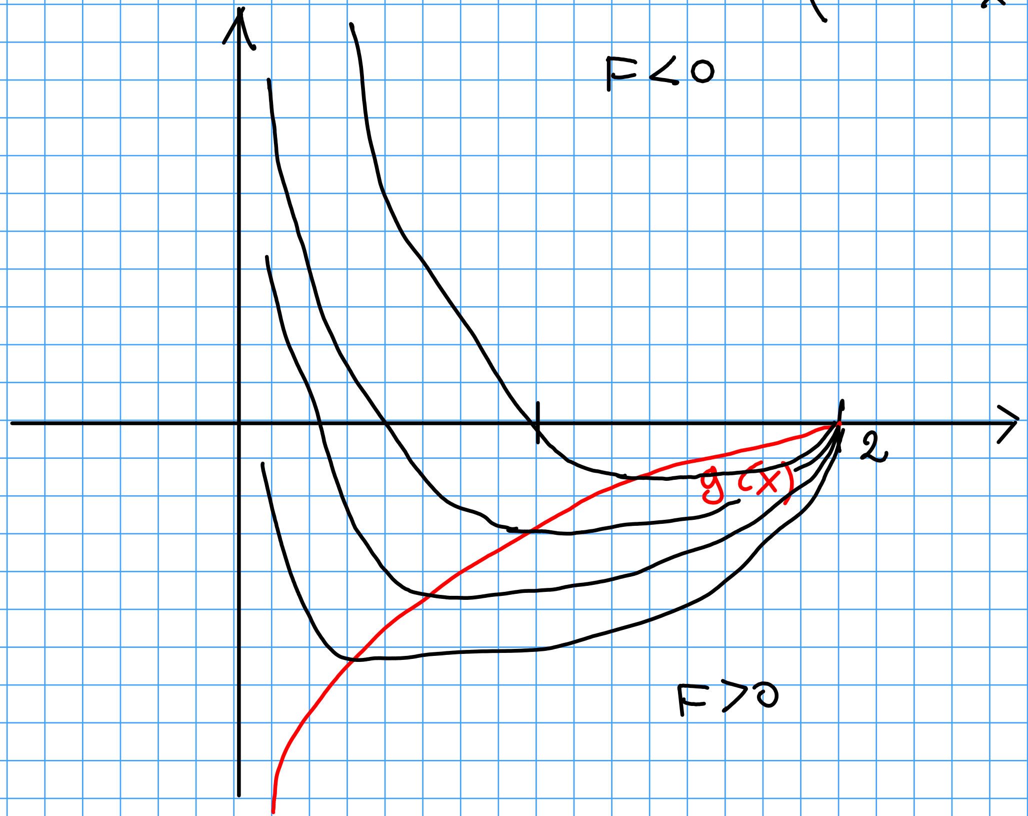
dove $\boxed{c = \dfrac{y_0}{3} - \ln 3}$.

(b) $\boxed{\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x \to 2^-} y(x) = 0^-}$ per ogni c

(c) $F(x,y) := \dfrac{2xy}{x^2-4} - \dfrac{8}{x}$. Allora (per $0 < x < 2$)

$$F(x,y) > 0 \iff \frac{2xy}{x^2-4} > \frac{8}{x} \iff y < 8\,\frac{(x^2-4)}{x^2} =: g(x)$$

Studiamo $g(x) = 8\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)$ → curve rosse. Si ricavano



i grafici per le $y(x)$ rappresentate qui a sinistra. (Tutte le curve sono "dello stesso tipo.

(d) Da quanto trovato segue che y NON è mai decrescente.