Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 28 giugno 2010 FILA A

1. Siano $f(x) = \sin(x^2)$, $g(x) = \sqrt{1+3x} - 1$ e $h(x) = \sqrt{|x|}$. Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

   (a) $h(x) = o(f(x))$; (b) $h(x) = O(g(x))$; (c) $g(x) = O(h(x))$; (d) $f(x) = o(g(x))$.

2. Se $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.). Nota: chiamiamo "punti di estremo relativo" (abbreviato "p.ti di estr. rel.") i punti che siano o di massimo relativo o di minimo relativo.
   - (a) $f$ ha 2 p.ti stazionari e 4 p.ti di estr. rel.;
   - (b) $f$ ha 2 p.ti stazionari e 2 p.ti di estr. rel.;
   - (c) $f$ ha 4 p.ti stazionari e 2 p.ti di estremo relativo;
   - (d) $f$ ha 4 p.ti stazionari e 4 p.ti di estremo relativo;
   - (e) $f$ ha 2 p.ti stazionari e non ha p.ti di estr. rel.;
   - (f) $f$ non ha né p.ti stazionari né p.ti di estr. rel. .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{n^n} + \frac{1+8n}{1+2n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{7} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+e^{4x}} - \sqrt{2}e^x}{1 - \sqrt{\cos(x)}}$$

---

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = 2\sqrt{y}$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)
   - (a) ha infinite soluzioni tali che $y(1) = 0$;
   - (b) ha una soluzione $y(x)$ tale che $y(1) = 1$ e $y(2) = 4$;
   - (c) tutte le sue soluzioni sono (debolmente) crescenti;
   - (d) ha infinite soluzioni tali che $y(0) = 1$.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + sin(n)}{1+n^3} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

   **(a)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1]$ e converge per le stesse $x$.

   **(b)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1]$.

   **(c)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge per le stesse $x$.

   **(d)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1,1[$ e converge sse $x \in ]-1,1]$.

   **(e)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1[$.

   **(f)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1,1[$ e converge per le stesse $x$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_5^{+\infty} \frac{10x - 26}{x^3 - 10x^2 + 26x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 9} - x^2, \qquad \text{per } x \in ]-3,3[, \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da $y_0$) (2 p.);

   (b) si calcolino (al variare di $y_0$) i limiti di $y(x)$ per $x \to -3^+$ e per $x \to 3^-$ (1 p.);

   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di $y_0$ (3 p.);

   (d) si dica per quali $y_0$ la soluzione $y$ è strettamente crescente su $[0,3]$ (1,5 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 28 giugno 2010 FILA B

1. Siano $h(x) = \sin\left(x^2\right)$, $g(x) = \sqrt{1+3x} - 1$ e $f(x) = \sqrt{|x|}$. Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

   (a) $f(x) = O(g(x))$; (b) $f(x) = o(h(x))$; (c) $h(x) = o(g(x))$; (d) $g(x) = O(f(x))$.

2. Se $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.). Nota: chiamiamo "punti di estremo relativo" (abbreviato "p.ti di estr. rel.") i punti che siano o di massimo relativo o di minimo relativo.
   (a) $f$ non ha né p.ti stazionari né p.ti di estr. rel.;
   (b) $f$ ha 2 p.ti stazionari e 4 p.ti di estr. rel.;
   (c) $f$ ha 2 p.ti stazionari e 2 p.ti di estr. rel.;
   (d) $f$ ha 4 p.ti stazionari e 2 p.ti di estremo relativo;
   (e) $f$ ha 4 p.ti stazionari e 4 p.ti di estremo relativo;
   (f) $f$ ha 2 p.ti stazionari e non ha p.ti di estr. rel. .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{n^n} + \frac{1+7n}{1+2n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{6} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+e^{4x}} - \sqrt{2}e^x}{1 - \sqrt{\cos(x)}}$$

---

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = 2\sqrt{y}$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)
   (a) ha infinite soluzioni tali che $y(0) = 1$;
   (b) ha infinite soluzioni tali che $y(1) = 0$;
   (c) ha una soluzione $y(x)$ tale che $y(1) = 1$ e $y(2) = 4$;
   (d) tutte le sue soluzioni sono (debolmente) crescenti.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + sin(n)}{1+n^3} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

   **(a)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1,1[$ e converge sse $x \in ]-1,1]$.

   **(b)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1[$.

   **(c)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1,1[$ e converge per le stesse $x$.

   **(d)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1]$ e converge per le stesse $x$.

   **(e)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1]$.

   **(f)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge per le stesse $x$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_4^{+\infty} \frac{8x-17}{x^3 - 8x^2 + 17x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2-9} - x^2, \qquad \text{per } x \in ]-3,3[, \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da $y_0$) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di $y_0$) i limiti di $y(x)$ per $x \to -3^+$ e per $x \to 3^-$ (1 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di $y_0$ (3 p.);
   (d) si dica per quali $y_0$ la soluzione $y$ è strettamente crescente su $[0,3]$ (1,5 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 28 giugno 2010 FILA C

1. Siano $g(x) = \sin\left(x^2\right)$, $h(x) = \sqrt{1+3x} - 1$ e $f(x) = \sqrt{|x|}$. Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

   (a) $f(x) = o(g(x))$; (b) $g(x) = o(h(x))$; (c) $h(x) = O(f(x))$; (d) $f(x) = O(h(x))$.

2. Se $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.). Nota: chiamiamo "punti di estremo relativo" (abbreviato "p.ti di estr. rel.") i punti che siano o di massimo relativo o di minimo relativo.

   (a) $f$ ha 2 p.ti stazionari e non ha p.ti di estr. rel.; (b) $f$ non ha né p.ti stazionari né p.ti di estr. rel.;
   (c) $f$ ha 2 p.ti stazionari e 4 p.ti di estr. rel.; (d) $f$ ha 2 p.ti stazionari e 2 p.ti di estr. rel.;
   (e) $f$ ha 4 p.ti stazionari e 2 p.ti di estremo relativo; (f) $f$ ha 4 p.ti stazionari e 4 p.ti di estremo relativo .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{n^n} + \frac{1+5n}{1+4n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{4} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+e^{4x}} - \sqrt{2}e^x}{1 - \sqrt{\cos(x)}}$$

---

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = 2\sqrt{y}$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)

   (a) tutte le sue soluzioni sono (debolmente) crescenti; (b) ha infinite soluzioni tali che $y(0) = 1$;
   (c) ha infinite soluzioni tali che $y(1) = 0$; (d) ha una soluzione $y(x)$ tale che $y(1) = 1$ e $y(2) = 4$.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + sin(n)}{1+n^3} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

   **(a)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1]$.

   **(b)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge per le stesse $x$.

   **(c)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1,1[$ e converge sse $x \in ]-1,1]$.

   **(d)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1[$.

   **(e)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1,1[$ e converge per le stesse $x$.

   **(f)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1]$ e converge per le stesse $x$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_3^{+\infty} \frac{6x - 10}{x^3 - 6x^2 + 10x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 9} - x^2, \qquad \text{per } x \in ]-3,3[, \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da $y_0$) (2 p.);

   (b) si calcolino (al variare di $y_0$) i limiti di $y(x)$ per $x \to -3^+$ e per $x \to 3^-$ (1 p.);

   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di $y_0$ (3 p.);

   (d) si dica per quali $y_0$ la soluzione $y$ è strettamente crescente su $[0,3]$ (1,5 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 28 giugno 2010        FILA D

1. Siano $h(x) = \sin(x^2)$, $f(x) = \sqrt{1+3x} - 1$ e $g(x) = \sqrt{|x|}$. Allora, per $x \to 0$ si ha: (per ogni affermazione indicare se è vera o falsa; 1/-1 punti a risposta).

$$\text{(a) } h(x) = o(f(x)); \qquad \text{(b) } f(x) = O(g(x)); \qquad \text{(c) } g(x) = O(f(x)); \qquad \text{(d) } g(x) = o(h(x)).$$

2. Se $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.).
Nota: chiamiamo "punti di estremo relativo" (abbreviato "p.ti di estr. rel.") i punti che siano o di massimo relativo o di minimo relativo.
   (a) $f$ ha 4 p.ti stazionari e 4 p.ti di estremo relativo; (b) $f$ ha 2 p.ti stazionari e non ha p.ti di estr. rel.;
   (c) $f$ non ha né p.ti stazionari né p.ti di estr. rel.; (d) $f$ ha 2 p.ti stazionari e 4 p.ti di estr. rel.;
   (e) $f$ ha 2 p.ti stazionari e 2 p.ti di estr. rel.; (f) $f$ ha 4 p.ti stazionari e 2 p.ti di estremo relativo .

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{n^n} + \frac{1+4n}{1+3n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+e^{4x}} - \sqrt{2}e^x}{1 - \sqrt{\cos(x)}}$$

---

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y' = 2\sqrt{y}$, ambientata per $x \in \mathbb{R}$ (1/-1 p.)
   (a) ha una soluzione $y(x)$ tale che $y(1) = 1$ e $y(2) = 4$; (b) tutte le sue soluzioni sono (debolmente) crescenti;
   (c) ha infinite soluzioni tali che $y(0) = 1$; (d) ha infinite soluzioni tali che $y(1) = 0$.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + sin(n)}{1+n^3} x^n$ si individui l'affermazione corretta: (2/-0,5 p.)

   **(a)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge per le stesse $x$.

   **(b)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1, 1[$ e converge sse $x \in ]-1, 1]$.

   **(c)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1[$.

   **(d)** La serie converge assolutamente sse $x \in ]-1, 1[$ e converge per le stesse $x$.

   **(e)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1]$ e converge per le stesse $x$.

   **(f)** La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1]$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_2^{+\infty} \frac{4x - 5}{x^3 - 4x^2 + 5x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 9} - x^2, \qquad \text{per } x \in ]-3, 3[, \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da $y_0$) (2 p.);

   (b) si calcolino (al variare di $y_0$) i limiti di $y(x)$ per $x \to -3^+$ e per $x \to 3^-$ (1 p.);

   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di $y_0$ (3 p.);

   (d) si dica per quali $y_0$ la soluzione $y$ è strettamente crescente su $[0, 3]$ (1,5 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 28 GIUGNO 2010
FOGLIO RISPOSTE

| | |
|---|---|
| Cognome: | |
| Nome: | |
| Matricola: | |
| Fila del compito: | A |

1. (a) SI ~~NO~~ (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) ~~SI~~ NO
2. ~~a~~ b c d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI
3. (a) $5$ (b) $\ln(7)$

---

NON HO SVOLTO LA PRIMA PARTE - USO IL PRIMO COMPITINO ☐

---

5. (a) ~~SI~~ NO (b) ~~SI~~ NO (c) ~~SI~~ NO (d) SI ~~NO~~
6. a b c ~~d~~ e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI
7. $\frac{5\pi}{2} + \ln(5)$ NON ESISTE

---

NON HO SVOLTO LA SECONDA PARTE - USO IL SECONDO COMPITINO ☐

---

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

---

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 28 GIUGNO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: B

1. (a) SI ~~NO~~ (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) ~~SI~~ NO
2. | a | ~~b~~ | c | d | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI |
3. (a) $\frac{9}{2}$ (b) $\ln(6)$

---

NON HO SVOLTO LA PRIMA PARTE - USO IL PRIMO COMPITINO

---

5. (a) SI ~~NO~~ (b) ~~SI~~ NO (c) ~~SI~~ NO (d) ~~SI~~ NO
6. | ~~a~~ | b | c | d | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI |
7. $2\pi + \ln(4)$ NON ESISTE

---

NON HO SVOLTO LA SECONDA PARTE - USO IL SECONDO COMPITINO

---

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 28 GIUGNO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: C

1. (a) SI ~~NO~~ (b) ~~SI~~ NO (c) ~~SI~~ NO (d) SI ~~NO~~
2. a | b | ~~c~~ | d | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI
3. (a) $\frac{9}{4}$ (b) $\ln(4)$

NON HO SVOLTO LA PRIMA PARTE - USO IL PRIMO COMPITINO

5. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) ~~SI~~ NO
6. a | b | ~~c~~ | d | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI
7. $\frac{3}{2}\pi + \ln(3)$ NON ESISTE

NON HO SVOLTO LA SECONDA PARTE - USO IL SECONDO COMPITINO

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 28 GIUGNO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: D

1. (a) ~~SI~~ NO (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) SI ~~NO~~

2. | a | b | c | ~~d~~ | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI |

3. (a) $\frac{4}{3}$ (b) $\ln(3)$

NON HO SVOLTO LA PRIMA PARTE - USO IL PRIMO COMPITINO

5. (a) ~~SI~~ NO (b) ~~SI~~ NO (c) ~~SI~~ NO (d) SI ~~NO~~

6. | a | ~~b~~ | c | d | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI |

7. $\pi + \ln(2)$ NON ESISTE

NON HO SVOLTO LA SECONDA PARTE - USO IL SECONDO COMPITINO

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

(1) $f(x) = \sin(x^2)$ ; $g(x) = \sqrt{1+3x} - 1$ ; $h(x) = \sqrt{|x|}$ (i nomi delle funzioni cambiano a seconda delle file). ALLORA

- $f(x) = o(g(x))$ ? $\boxed{\text{SI}}$ perché $\dfrac{\sin(x^2)}{\sqrt{1+3x}-1} = \dfrac{x^2+o(x^2)}{\frac{3}{2}x+o(x)} \to 0$

- $g(x) = O(h(x))$ $\boxed{\text{SI}}$ perché $\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{|x|}} = \dfrac{\frac{3}{2}x+o(x)}{\sqrt{|x|}} \to 0$

  e dunque $\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{|x|}}$ è limitata

  (in effetti $g(x) = o(h(x))$ )

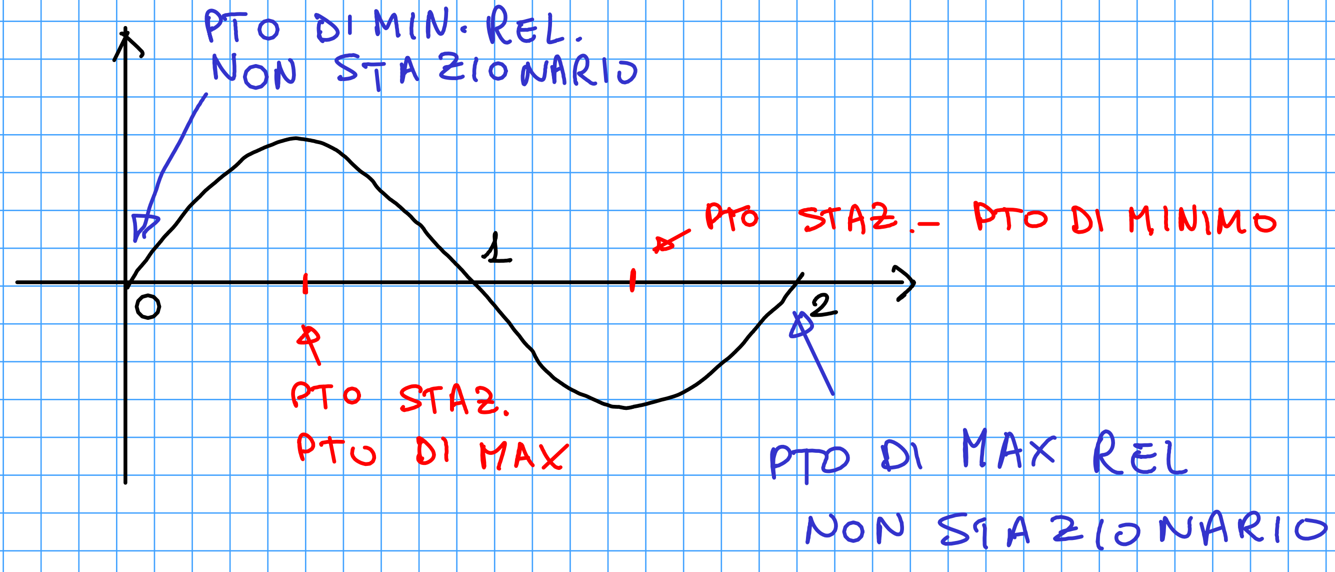
- $h(x) = O(g(x))$ $\boxed{\text{NO}}$ , perché $\left|\dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{1+3x}-1}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{|x|}}{\frac{3}{2}x+o(x)}\right| \to +\infty$

  e allora $\dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{1+3x}-1}$ non può essere limitato

- $h(x) = o(f(x))$ $\boxed{\text{NO}}$ perché $\dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{1+3x}-1} = \dfrac{\sqrt{|x|}}{x^2+o(x^2)} \to +\infty$

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ . Se studiamo $f$ su $[0,2]$ troviamo $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ ; $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{3}$ . Se ne ottiene il grafico :




DUNQUE $f$ HA

$\boxed{\text{4 pti di estremo relativo e 2 pti stazionari}}$

(3) (a) $\sqrt[n!]{n^n} = n^{\frac{n}{n!}} = n^{\frac{1}{(n-1)!}} = e^{\frac{\ln(n)}{(n-1)!}} \to 1$

perché $\frac{\ln(n)}{(n-1)!} \to 0$ ( dato che $\frac{\ln(n)}{n-1} \to 0$ , per esempio)

ALLORA

$$\sqrt[n!]{n^n} + \frac{1+An}{1+Bn} \to \boxed{1+\frac{A}{B}}$$

(b) $n\left(\sqrt[n]{A} - 1\right) = n\left(e^{\frac{\ln(A)}{n}} - 1\right) = n\left(\frac{\ln(A)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to \boxed{\ln(A)}$

(5) l'equazione (a variabili separabili)

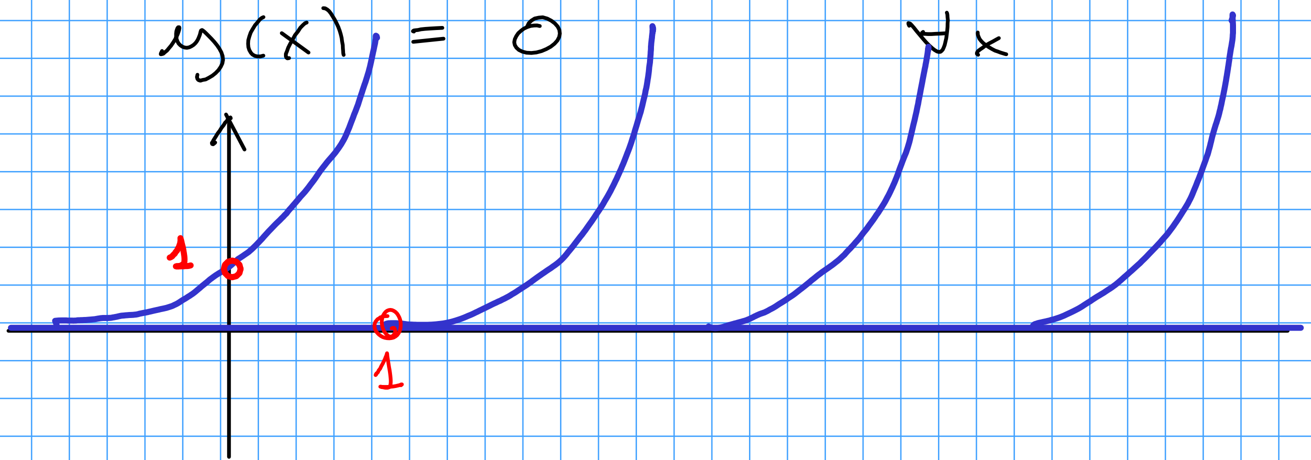
$$y' = 2\sqrt{y}$$

ho come soluzioni la famiglia di curve (al variare di $c \in \mathbb{R}$)

$$y(x) = \begin{cases} (x+c)^2 & \text{se } x \geq -c \\ 0 & \text{se } x \leq -c \end{cases}$$

(visto a lezione; segue dalla formula risolutiva per quanto riguarda l'espressione sulle $x > -c$) PIÙ la sol. costante

$y(x) = 0 \quad \forall x$




ALLORA: – Se $y(1) = 0$ ci sono infinite soluzioni (posso rimanere in zero o uscire da zero in un qualunque istante $\overline{x} > 1$)

– Se $y(0) = 1$, c'è un'unica sol.

– Se si cerca la sol. con $y(1) = 1$ si trova $c = 0$, cioè $y(x) = x^2$. Tale $y(x)$ assume il valore 4 se $x = 2$ (ovvio!)

Dunque esiste una sol. con $y(1) = 1$ e $y(2) = 4$

– È chiaro che, essendo $y' = \sqrt{y} \geq 0$, tutte le sol. sono crescenti

(6) $\sum (-1)^n \frac{n^2+\sin(n)}{1+n^3} x^n$ è una serie di potenze

$\sum a_n x^n$ dove $a_n = (-1)^n \frac{n^2+\sin(n)}{1+n^3}$

Dato che $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{n^3} \frac{1+o(1)}{1+o(1)}} = \frac{\sqrt[n]{1+o(1)}}{\sqrt[n]{n}} \to 1$

il raggio di conv. è 1 ($\Rightarrow$ conv. ass. se $x \in ]-1,1[$)

Vediamo cosa fa in $\pm 1$. Dato che

$|a_n| = \frac{n^2}{n^3} \frac{1+o(1)}{1+o(1)} = \frac{1}{n}(1+o(1)) \simeq \frac{1}{n}$

la serie $\sum |a_n|$ diverge e quindi $\sum a_n x^n$ non conv. ass.

né per $x = 1$ né per $x = -1$. Vediamo la conv. semplice.

Quando $x = 1$ la serie diventa $\sum (-1)^n |a_n|$

e si vede facilmente che $|a_n|$ decresce per $n$ grande. Dunque

la serie converge per Leibniz. Quando $x = -1$

la serie coincide con $\sum |a_n|$ che diverge. DUNQUE

$\boxed{\text{la serie conv. ass. se } x \in ]-1,1[ \text{ e conv. se } x \in ]-1,1]}$

(7) L'integrale è della forma

$$\int_A^{+\infty} \frac{2Ax-(A^2+1)}{x((x-A)^2+1)}\,dx = (I)$$ (A dipende dalla fila)

Riducendo in fratti semplici si trova

$$\frac{2Ax-(A^2+1)}{x((x-A)^2+1)} = \frac{x}{(x-A)^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{(x-A)}{(x-A)^2+1} - \frac{1}{x} + \frac{A}{(x-A)^2+1}$$

DUNQUE $(I) = \left[A \operatorname{arctg}(x-A) + \ln \frac{\sqrt{(x-A)^2+1}}{x}\right]_A^{+\infty} = \boxed{\frac{A\pi}{2} + \ln(A)}$

(4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+e^{4x}} - \sqrt{2}\,e^x}{1-\cos(x)}.$$ Si ha:

$$\sqrt{1+e^{4x}} = \sqrt{1+1+4x+\frac{(4x)^2}{2}+o((4x)^2)} =$$

$$\sqrt{2+4x+8x^2+o(x^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1+2x+4x^2+o(x^2)} =$$

$$\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(2x+4x^2+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}\left(2x+o(x)\right)^2+o\left((2x+o(x))^2\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[1 + x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] = \sqrt{2}\left[1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right]$$

Inoltre

$$\sqrt{2}e^{x} = \sqrt{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x)\right] \quad e$$

$$1 - \sqrt{\cos(x)} = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{1/2} = 1 - \left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

da cui

$$\frac{\sqrt{1+e^{4x}} - \sqrt{2}e^{x}}{1 - \cos(x)} = \frac{\sqrt{2}\left[\cancel{1} \cancel{+x} + \frac{3}{2}x^2 + o(x) - \cancel{1} \cancel{-x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)} =$$

$$\sqrt{2}\,\frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)} \longrightarrow \boxed{4\sqrt{2}}$$

(8) $\quad y' = \dfrac{2xy}{x^2 - 9} - x^2 \qquad (-3 < x < 3) \qquad y(0) = y_0$

(a) Applicando la formula risolutiva:

$$A(x) = \int_0^x \frac{2t}{t^2 - 9}\,dt = \left[\ln|t^2 - 9|\right]_0^x = \ln\frac{9 - x^2}{9}$$

$$y(x) = \frac{9-x^2}{9}\left\{ y_0 - \int_0^x 9\,\frac{t^2}{9-t^2}\,dt \right\} =$$

$$(9-x^2)\left\{ \frac{y_0}{9} + \int_0^x \frac{t^2}{t^2-9}\,dt \right\} =$$

$$= (9-x^2)\left\{ \frac{y_0}{9} + \int_0^x \left(1 + \frac{9}{t^2-9}\right) dt \right\} = (9-x^2)\left\{ \frac{y_0}{9} + x + \frac{3}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right) dt \right\}$$

$$= (9-x^2)\left\{ \frac{y_0}{9} + x + \frac{3}{2}\ln\left(\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right) \right\} =$$

$$\boxed{(9-x^2)\left\{ \frac{y_0}{9} + x + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) \right\}}$$

(b)

$$\lim_{x\to -3^+} y(x) = 0^+$$

$$\lim_{x\to 3^-} y(x) = 0^-$$

$(\forall\, y_0 \in \mathbb{R})$

$\Leftarrow$ in entrambi i casi l'infinitesimo "vince" sull'infinito "logaritmico". Il segno poi è determinato dal $\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ che va a $+\infty$ se $x \to -3^+$ e va a $-\infty$ se $x \to 3^-$

(c) Consideriamo $F(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2-9} - x^2$ e vediamone la segno. Notiamo intanto che se $x=0 \Rightarrow F(x,y)=0$.

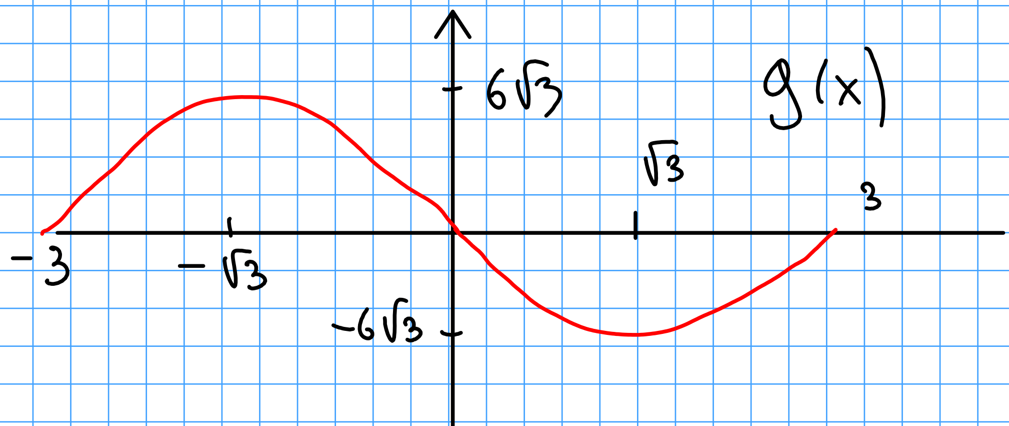
Se poi imponiamo $F(x,y) \geq 0$ e ci mettiamo in $x \neq 0$, troviamo

$$\frac{2xy}{x^2-9} \geq x^2 \iff 2xy \leq x^2(x^2-9) \qquad (x^2-9<0)$$

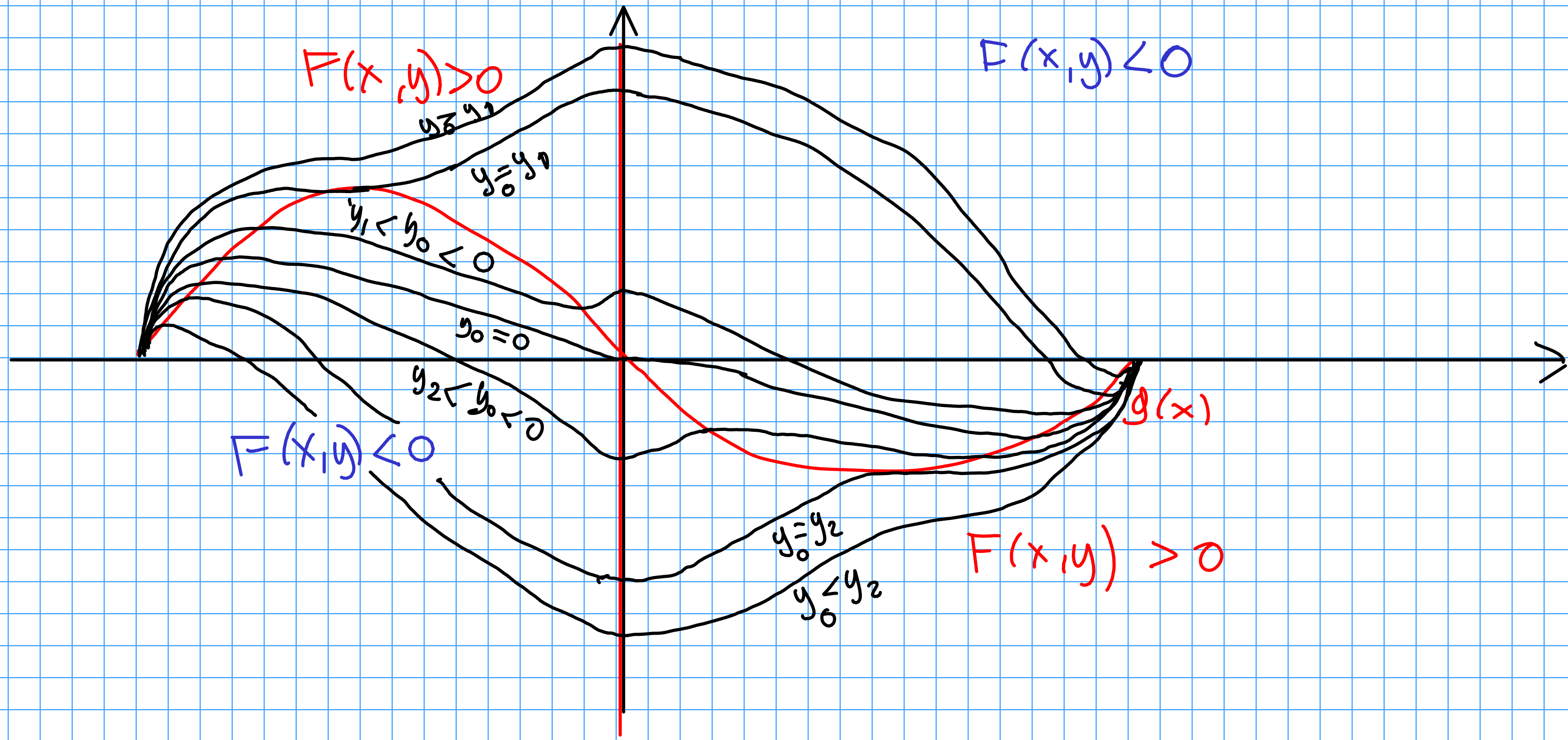
$$\iff \begin{cases} y \leq \dfrac{x(x^2-9)}{2} & \text{per } x \in \,]0,3[ \\[2ex] y \geq \dfrac{x(x^2-9)}{2} & \text{per } x \in \,]-3,0[ \end{cases}$$

Se $g(x) = \dfrac{x(x^2-9)}{2} = x(x-3)(x+3)$ vediamo facilmente qual è il grafico di $g(x)$ (curva rosso sotto).

In particolare $x=\sqrt{3}$ è un pto di con valore $g(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$
e $x=-\sqrt{3}$ è un pto di con valore $g(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$




POSSIAMO ALLORA TRACCIARE I GRAFICI DELLE SOLUZIONI




dove $y_1$ è il valore di $y_0$ per cui la $y(x)$ verifica $y(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$

e $y_2$ è il valore di $\sqrt{3} + 3\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ $y(x)$ verifica $y(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$

Facendo i calcoli viene:

$y_1 = \sqrt{3} + 3\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \qquad y_2 = -y_1$

d) Dai grafici sopra si vede che $y(x)$ cresce strettamente su $[0,3[$

se e solo se $y_0 \leq y_2$

$x = -\sqrt{3} \longrightarrow$

$$(9-3)\left\{ \frac{y_0}{9} - \sqrt{3} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) = 6\sqrt{3}\right.$$

$$\frac{y_0}{9} = \sqrt{3} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3}\right) = \sqrt{3} + 3\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\boxed{(9-x^2)\left\{\frac{y_0}{9} + x + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)\right\}}$$