Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 7 giugno 2010 FILA A

1. Sia $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := \frac{1}{x} + 4x^2 - \frac{3}{2}$; per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa (1/-1 punti a risposta).

   (a) 1 è l'unico minimo relativo; (b) f è limitata;
   (c) f ha due punti stazionari; (d) f ha un punto di massimo relativo.

2. Se $f(x) := \frac{2}{(x+1)^2} - 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.).

   (a) f è positiva, concava su $[0, +\infty[$; (b) f è crescente, convessa su $[0, +\infty[$;
   (c) f è decrescente, convessa su $[0, +\infty[$; (d) f è crescente, concava su $[0, +\infty[$;
   (e) f è decrescente, concava su $[0, +\infty[$; (f) f è positiva, convessa su $[0, +\infty[$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

   $$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^8 + 2n^7 - n + 6} - n \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + n^8 + e^{7n})}{n+6}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 2\sin^2(x)} - x^2 - 1}{\tan(x^2)\sin^2(x)}$$

---

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 2e^x$ (1/-1 p.)

   (a) Le sue soluzioni sono del tipo $Ae^x + Be^{-x} + \gamma e^x$ con A e B arbitrari e γ opportuna.
   (b) Le soluzioni dell'omogenea sono del tipo $Ae^{x_1 x} + Be^{x_2 x}$ dove x_1 e x_2 sono le radici del polinomio caratteristico.
   (c) La soluzione $y(x)$ con valori iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ è data da $y(x) = x^2 e^x$.
   (d) Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti costanti.

6. Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{1+n^2}$ si individui l'affermazione corretta tra le seguenti (2/-0,5 p.)

   (a) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1]$ e converge per le stesse x.
   (b) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1]$.
   (c) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge per le stesse x.
   (d) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in]-1, 1]$.
   (e) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1[$.
   (f) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge per le stesse x.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

   $$\int_2^{+\infty} \frac{x-5}{x^3 - 4x^2 + 5x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

   $$y' = \frac{2xy}{x^2+9} - 2x^2 - 3, \qquad (\text{per } x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (1 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i val ori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);
   (d) si dica per quali y_0 la soluzione y è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$ (2 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 7 GIUGNO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: A

1. (a) SI ~~NO~~ (b) SI ~~NO~~ (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO

2. | a | b | ~~c~~ | d | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI |

3. (a) $1/4$ (b) 7

NON HO SVOLTO LA PRIMA PARTE - USO IL PRIMO COMPITINO

---

5. (a) SI ~~NO~~ (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) ~~SI~~ NO

6. | a | b | c | d | ~~e~~ | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI |

7. $\ln(2) - \frac{\pi}{2}$ NON ESISTE

NON HO SVOLTO LA SECONDA PARTE - USO IL SECONDO COMPITINO

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 7 giugno 2010 FILA B

1. Sia $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := \dfrac{1}{x} + 4x^2 - \dfrac{3}{2}$; per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa (1/-1 punti a risposta).

   (a) f ha un punto di massimo relativo; (b) 1 è l'unico minimo relativo;
   (c) f è limitata; (d) f ha due punti stazionari.

2. Se $f(x) := \dfrac{2}{(x+1)^2} - 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.).

   (a) f è crescente, convessa su $[0,+\infty[$; (b) f è positiva, concava su $[0,+\infty[$;
   (c) f è crescente, concava su $[0,+\infty[$; (d) f è decrescente, convessa su $[0,+\infty[$;
   (e) f è positiva, convessa su $[0,+\infty[$; (f) f è decrescente, concava su $[0,+\infty[$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

   $$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[9]{n^9 - 2n^8 - n + 6} - n \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^9+e^{8n})}{n+6}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\sin^2(x)} - x^2 - 1}{\tan(x^2)\sin^2(x)}$$

---

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 2e^x$ (1/-1 p.)

   (a) Le soluzioni dell'omogenea sono del tipo $Ae^{x_1 x} + Be^{x_2 x}$ dove x_1 e x_2 sono le radici del polinomio caratteristico.
   (b) La soluzione $y(x)$ con valori iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ è data da $y(x) = x^2 e^x$.
   (c) Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti costanti.
   (d) Le sue soluzioni sono del tipo $Ae^x + Be^{-x} + \gamma e^x$ con A e B arbitrari e γ opportuna.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{1+n^2}$ si individui l'affermazione corretta tra le seguenti (2/-0,5 p.)

   (a) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1]$.
   (b) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1]$ e converge per le stesse x.
   (c) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in]-1,1]$.
   (d) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge per le stesse x.
   (e) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge per le stesse x.
   (f) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1[$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

   $$\int_5^{+\infty} \frac{x-26}{x^3 - 10x^2 + 26x}\,dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

   $$y' = \frac{2xy}{x^2+9} - 2x^2 - 3, \qquad (\text{per } x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (1 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);
   (d) si dica per quali y_0 la soluzione y è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$ (2 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 7 GIUGNO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: B

1. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) SI ~~NO~~ (d) SI ~~NO~~

2. a b c ~~d~~ e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

3. (a) $-2/9$ (b) 8

NON HO SVOLTO LA PRIMA PARTE - USO IL PRIMO COMPITINO

5. (a) SI ~~NO~~ (b) ~~SI~~ NO (c) ~~SI~~ NO (d) SI ~~NO~~

6. a b c d e ~~f~~ NESSUNA DELLE PRECEDENTI

7. $\ln(5)-2\pi$ NON ESISTE

NON HO SVOLTO LA SECONDA PARTE - USO IL SECONDO COMPITINO

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 7 giugno 2010 FILA C

1. Sia $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := \dfrac{1}{x} + 4x^2 - \dfrac{3}{2}$; per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa (1/-1 punti a risposta).

   (a) f ha due punti stazionari; (b) f ha un punto di massimo relativo;
   (c) 1 è l'unico minimo relativo; (d) f è limitata.

2. Se $f(x) := \dfrac{2}{(x+1)^2} - 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.).

   (a) f è decrescente, convessa su $[0, +\infty[$; (b) f è crescente, concava su $[0, +\infty[$;
   (c) f è positiva, convessa su $[0, +\infty[$; (d) f è decrescente, concava su $[0, +\infty[$;
   (e) f è positiva, concava su $[0, +\infty[$; (f) f è crescente, convessa su $[0, +\infty[$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^8 + 4n^7 - n + 6} - n \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + n^8 + e^{7n})}{n+6}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 2\sin^2(x)} - x^2 - 1}{\tan(x^2)\sin^2(x)}$$

---

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 2e^x$ (1/-1 p.)

   (a) La soluzione $y(x)$ con valori iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ è data da $y(x) = x^2 e^x$.
   (b) Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti costanti.
   (c) Le sue soluzioni sono del tipo $Ae^x + Be^{-x} + \gamma e^x$ con A e B arbitrari e γ opportuna.
   (d) Le soluzioni dell'omogenea sono del tipo $Ae^{x_1 x} + Be^{x_2 x}$ dove x_1 e x_2 sono le radici del polinomio caratteristico.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{1+n^2}$ si individui l'affermazione corretta tra le seguenti (2/-0,5 p.)

   (a) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge per le stesse x.
   (b) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in]-1, 1]$.
   (c) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge per le stesse x.
   (d) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1[$.
   (e) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1]$ e converge per le stesse x.
   (f) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1, 1[$ e converge sse $x \in [-1, 1]$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_3^{+\infty} \frac{x - 10}{x^3 - 6x^2 + 10x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2+9} - 2x^2 - 3, \qquad (\text{per } x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (1 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);
   (d) si dica per quali y_0 la soluzione y è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$ (2 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 7 GIUGNO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: C

1. (a) SI ~~NO~~ (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) SI ~~NO~~

2. ~~a~~ | b | c | d | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI

3. (a) $1/2$ (b) 7

NON HO SVOLTO LA PRIMA PARTE - USO IL PRIMO COMPITINO

---

5. (a) ~~SI~~ NO (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) SI ~~NO~~

6. a | b | c | ~~d~~ | e | f | NESSUNA DELLE PRECEDENTI

7. $\ln(3) - \pi$ NON ESISTE

NON HO SVOLTO LA SECONDA PARTE - USO IL SECONDO COMPITINO

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 7 giugno 2010 FILA D

1. Sia $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := \dfrac{1}{x} + 4x^2 - \dfrac{3}{2}$; per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa (1/-1 punti a risposta).

   (a) f è limitata; (b) f ha due punti stazionari;
   (c) f ha un punto di massimo relativo; (d) 1 è l'unico minimo relativo.

2. Se $f(x) := \dfrac{2}{(x+1)^2} - 1$, quale tra le seguenti affermazioni è vera ? (2/-0,5 p.).

   (a) f è decrescente, concava su $[0,+\infty[$; (b) f è positiva, convessa su $[0,+\infty[$;
   (c) f è crescente, convessa su $[0,+\infty[$; (d) f è positiva, concava su $[0,+\infty[$;
   (e) f è decrescente, convessa su $[0,+\infty[$; (f) f è crescente, concava su $[0,+\infty[$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[9]{n^9 - 4n^8 - n + 6} - n \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + n^9 + e^{8n})}{n+6}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (6,5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 2\sin^2(x)} - x^2 - 1}{\tan(x^2)\sin^2(x)}$$

---

5. Quali affermazioni sono vere per l'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 2e^x$ (1/-1 p.)

   (a) Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti costanti.
   (b) Le sue soluzioni sono del tipo $Ae^x + Be^{-x} + \gamma e^x$ con A e B arbitrari e γ opportuna.
   (c) Le soluzioni dell'omogenea sono del tipo $Ae^{x_1 x} + Be^{x_2 x}$ dove x_1 e x_2 sono le radici del polinomio caratteristico.
   (d) La soluzione $y(x)$ con valori iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ è data da $y(x) = x^2 e^x$.

6. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{1+n^2}$ si individui l'affermazione corretta tra le seguenti (2/-0,5 p.)

   (a) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1[$.
   (b) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge per le stesse x.
   (c) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge sse $x \in [-1,1]$.
   (d) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1]$ e converge per le stesse x.
   (e) La serie converge assolutamente sse $x \in [-1,1[$ e converge per le stesse x.
   (f) La serie converge assolutamente sse $x \in]-1,1[$ e converge sse $x \in]-1,1]$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_4^{+\infty} \frac{x - 17}{x^3 - 8x^2 + 17x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2+9} - 2x^2 - 3, \qquad (\text{per } x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (1 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);
   (d) si dica per quali y_0 la soluzione y è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$ (2 p.).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITO DI ANALISI I DEL 7 GIUGNO 2010
FOGLIO RISPOSTE

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	D

1. (a) SI ~~NO~~ (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) SI ~~NO~~

2. ~~a~~ b c d ~~e~~ f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

nel testo usato al compito era giusta la $\boxed{a}$

3. (a) $-4/9$ (b) 8

NON HO SVOLTO LA PRIMA PARTE - USO IL PRIMO COMPITINO

5. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO

6. ~~a~~ b c d e f NESSUNA DELLE PRECEDENTI

7. $\ln(4) - \frac{3\pi}{2}$ NON ESISTE

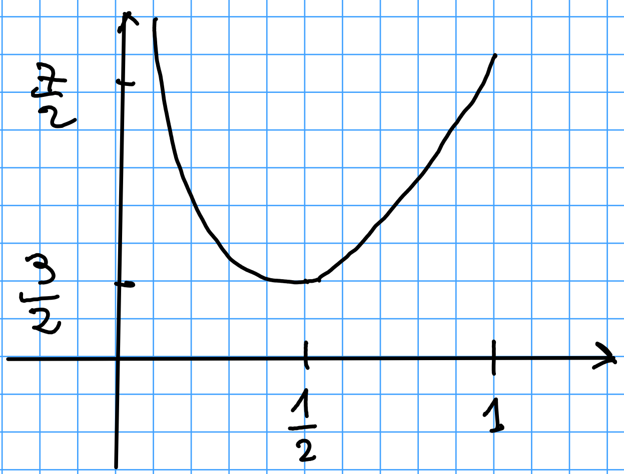
NON HO SVOLTO LA SECONDA PARTE - USO IL SECONDO COMPITINO

Questo foglio è **l'unico** da consegnare; il testo si può tenere.
Tempo disponibile: **due ore e trenta minuti**.
Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Per gli esercizi 1,2,3 e 5,6,7 **conta solo la risposta**.
Gli esercizi 1,2,5,6 comportano **punteggi negativi** (gli altri no).
Gli esercizi 4 e 8 vanno svolti sulle facciate libere di questi fogli. La loro valutazione **dipenderà dallo svolgimento**.
Per raggiungere la sufficienza è **necessario** riportare(contemporaneamente):
(a) voto maggiore o eguale a 8 nel blocco di esercizi 1,2,3,5,6,7;
(b) media complessiva maggiore o eguale a 15.

(1) Facciamo uno studio di funzione di $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2 - \frac{3}{2}$, per $0 < x \leq 1$. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad f(1) = \frac{7}{2}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 8x = \frac{-1+8x^3}{x^2}$$

da cui $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$, $f'(x) > 0 \iff x > \frac{1}{2}$. Dato che



$f(1/2) = 2 + \frac{4}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, risulta che

$\frac{1}{2}$ è punto stazionario, f decresce su $]0, 1/2[$

f cresce su $]1/2, 1]$. Dunque

- $\frac{1}{2}$ è stazionario ed è l'unico pto stazionario $\Rightarrow$ f NON HA due pti stazionari
- $\frac{1}{2}$ è pto di minimo (e quindi di min. rel.) ed è l'unico.
- $\frac{3}{2}$ è il minimo (e quindi è un min. rel) ed è l'unico min. rel.
- 1 è pto di max rel (ed è l'unico), ma non è stazionario. $\Rightarrow$ f ha un pto di max rel.
- $7/2$ è un max. rel - ma non è massimo.
- Il max non esiste: in fatti $\sup f = +\infty \to f$ NON È limitata

2) $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - 1$. Si vede che f non è né ≥ 0 né ≤ 0

dato che per $x \to +\infty$ tende a -1, mentre $f(0) = 2-1 = 1$

Si ha $f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^3} < 0 \quad \forall x \geq 0$ mentre

$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^4} > 0 \quad \forall x \geq 0$ da cui

$$\boxed{f \text{ È DECRESCENTE, CONVESSA}}$$

(3)

- $\sqrt[k]{n^k + An^{k-1} - n + 6} - n = n\left(1 + \frac{A}{n} - \frac{1}{n^{k-1}} + \frac{6}{n^k}\right)^{\frac{1}{k}} - n =$
$n\left[\left(1 + \frac{A}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/k} - 1\right] = n\left[\cancel{1} + \frac{A}{k}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1}\right] = \frac{A}{k} + o(1) \to \boxed{\frac{A}{k}}$

- $\frac{\ln\left(1 + n^A + e^{Bn}\right)}{n+6} = \frac{\ln\left(e^{Bn}\left(e^{-Bn} + n^A e^{-Bn} + 1\right)\right)}{n+6} =$
$\frac{\ln(e^{Bn}) + \ln\left(1 + n^A e^{-Bn} + e^{-Bn}\right)}{n+6} = \frac{Bn}{n+6} + \frac{\ln(1 + o(1))}{n+6} \to \boxed{B}$

4)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\sin^2(x)}-x^2-1}{\tan(x^2)\sin(x^2)} \quad . \quad \text{S. ha:}$$

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2 =$$

$$= x^2\left(1+2\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)+o\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right) =$$

$$= x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

- $\sqrt{1+2\sin^2(x)} = \left(1+2x^2-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)^{1/2} =$

$$1+\frac{1}{2}\left(2x^2-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{8}\left(2x^2+o(x^2)\right)^2+o\left(\left(2x^2+o(x^2)\right)^2\right) =$$

$$= 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{8}x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).$$

- $tg(x^2)\sin(x^2) = (x^2+o(x^2))(x^2+o(x^2)) = x^4+o(x^4)$. DUNQUE

$$\frac{\sqrt{1+2\sin^2(x)}-x^2-1}{x^4+o(x^4)} = \frac{-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} \longrightarrow \boxed{-\frac{5}{6}}$$

5) $y'' - 2y' + y = 2e^x$

- È un'eq. lin. a coeff. costanti? $\cancel{\boxed{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$
- La sol. generale è $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \gamma e^x$ per γ opportuna? $\boxed{\text{SI}}$ $\cancel{\boxed{\text{NO}}}$

No; in effetti il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$ che ha solo la radice $x_0 = 1$ (doppia). Dunque la sol. generale dell'omogenea è data da $Ae^x + Bxe^x + \gamma x^2 e^x$ per A, B arbitrari e per γ opportuna. Il fatto che la sol. particolare sia della forma $\gamma x^2 e^x$ dipende dal fatto che 1 è radice doppia di $P(z)$

- Le sol. dell'omogenea sono del tipo $Ae^{x_1 x} + Be^{x_2 x}$ dove x_1 e x_2 sono le radici del polinomio caratteristico? $\boxed{\text{SI}}$ $\cancel{\boxed{\text{NO}}}$

No, per quanto visto al punto precedente

- La sol. $y(x)$ con $y(0) = y'(0) = 0$ è $x^2 e^x$ $\cancel{\boxed{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$

Proviamo a vedere se $y(x) = x^2 e^x$ verifica l'eq. Si ha:

$y'(x) = (2x + x^2)e^x$, $y''(x) = (2 + 4x + x^2)e^x \Rightarrow$

$y'' - 2y' + y = (2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2)e^x = 0$; inoltre $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

6) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,x^n}{1+n^2}$$

Si tratta di una serie di potenze il cui raggio di conv. è $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{1+n^2}\right|}\right)^{-1} = 1$ e quindi la serie converge assolutamente per $-1<x<1$ e non converge se $|x|>1$.

Rimane da capire cosa succede se $x=1$ o $x=-1$.

Nel primo caso ho la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ che diverge essendo $\frac{n}{1+n^2} \simeq \frac{1}{n}$ $\left(e \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\right)$. Nel secondo caso ho la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$ che converge per Leibniz – ma non assolutamente dato che $\left|(-1)^n \frac{n}{1+n^2}\right| = \frac{n}{1+n^2}$ (che è quella di prima).

IN DEFINITIVA la serie

CONVERGE ASSOLUTAMENTE se $-1<x<1$

CONVERGE se $-1\le x<1$

AC su $[-1,1]$

AC e C su $[-1,1[$

AC su $[-1,1[$ e C su $[-1,1]$

C e AC su $]-1,1[$

AC su $]-1,1[$ e C su $[-1,1[$

7) Caso (A)

$$\int_2^{+\infty} \frac{x-5}{x\,(x^2-4x+5)}\,dx$$; facciamo la rid. in fratti semplici

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5} = \frac{Ax^2-4Ax+5A+Bx^2+Cx}{x(x^2-4x+5)}$$ da cui

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A+C=1 \\ 5A=-5 \end{cases} \iff \begin{cases} B=1 \\ C=-3 \\ A=-1 \end{cases}$$ e l'int. diventa

$$\int_2^{+\infty}\left(\frac{x-3}{(x-2)^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx = \int_2^{+\infty}\left(\frac{(x-2)}{(x-2)^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx - \int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-2)^2+1} =$$

$$\ln\frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{x}\Bigg|_2^{+\infty} - \operatorname{arctg}(x-2)\Big|_2^{+\infty} = \ln(2) - \frac{\pi}{2}$$

CASO B (con calcoli analoghi) $\frac{x-26}{x(x^2-10x+26)} = \frac{x-11}{x^2-10x+26} - \frac{1}{x}$ $\to$ l'int. diventa

$$\int_5^{+\infty}\left(\frac{x-9}{(x-5)^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx = \int_5^{+\infty}\left(\frac{(x-5)}{(x-5)^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx - \int_5^{-\infty}\frac{4\,dx}{(x-5)^2+1} =$$

$$\ln\frac{\sqrt{(x-5)^2+1}}{x}\Bigg|_5^{+\infty} - 4\operatorname{arctg}(x-5)\Big|_5^{+\infty} = \ln(5) - 2\pi$$

CASO C (con calcoli analoghi) $\frac{x-17}{x(x^2-8x+17)} = \frac{x-7}{x^2-8x+17} - \frac{1}{x}$ → l'int. diventa

$$\int_4^{+\infty}\left(\frac{x-7}{(x-4)^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(\frac{(x-4)}{(x-4)^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx - \int_5^{-\infty}\frac{3\,dx}{(x-4)^2+1} =$$

$$\ln\frac{\sqrt{(x-4)^2+1}}{x}\Bigg|_4^{+\infty} - \operatorname{arctg}(x-4)\Bigg|^{+\infty} = \ln(4) - \frac{3\pi}{2}$$

CASO C (con calcoli analoghi) $\frac{x-10}{x(x^2-6x+10)} = \frac{x-5}{x^2-6x+10} - \frac{1}{x}$ → l'int. diventa

$$\int_3^{+\infty}\left(\frac{x-5}{(x-3)^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx = \int_3^{+\infty}\left(\frac{(x-3)}{(x-3)^2+1} - \frac{1}{x}\right)dx - \int^{-\infty}\frac{2\,dx}{(x-5)^2+1} =$$

$$\ln\frac{\sqrt{(x-3)^2+1}}{x}\Bigg|_3^{+\infty} - \operatorname{arctg}(x-3)\Bigg|_3^{+\infty} = \ln(3) - \pi$$

8)

$$y' = \frac{2xy}{x^2+9} - 2x^2 - 3 \qquad y(0) = y_0$$

(a) $$a(x) = \frac{2x}{x^2+9} \Rightarrow A(x) = \int_0^x \frac{2t}{t^2+9}\,dt = \ln(t^2+9)\Big|_0^x = \ln\left(\frac{x^2+9}{9}\right)$$

da cui

$$y(x) = \frac{x^2+9}{9}\left\{ y_0 - \int_0^x \frac{2t^2+3}{t^2+9}\cdot 9\,dt \right\} =$$

$$(x^2+9)\left\{ \frac{y_0}{9} - \int_0^x \frac{2t^2+3}{t^2+9}\,dt \right\} =$$

$$(x^2+9)\left\{ \frac{y_0}{9} - \int_0^x \left(2 - \frac{15}{t^2+9}\right)dt \right\} = (x^2+9)\left\{ \frac{y_0}{9} - 2x + \frac{\cancel{15}^{\,5}}{\cancel{9}_{\,3}} \int_0^x \frac{dt}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1} \right\}$$

$$= \boxed{(x^2+9)\left\{ \frac{y_0}{9} - 2x + 5\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) \right\}}$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty \qquad (\forall c)$$

(c) Poniamo $F(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+9} - 2x^2 - 3$ (allora l'eq. è $y' = F(x,y)$)

Si ha $F(x,y) \geq 0 \iff 2xy \geq (2x^2+3)(x^2+9) \iff$

$y \geq (2x^4+21x^2+27)/x$ se $x>0$ $\qquad$ ($F(x,y) <$ se $x=0$)

$y \leq (2x^4+21x^2+27)/x$ se $x<0$

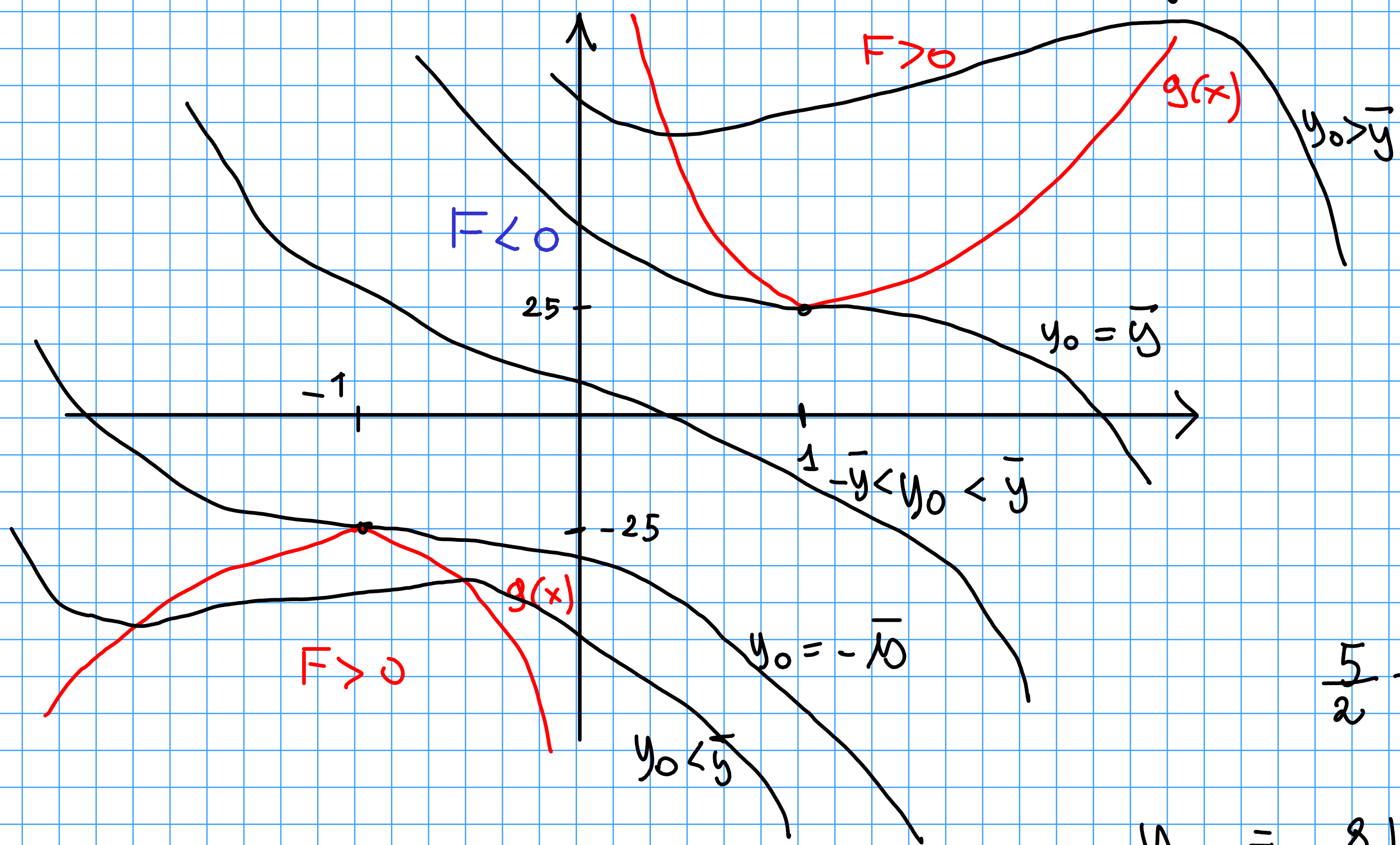
Tracciamo il grafico di $g(x) := \frac{2x^4+21x^2+27}{x}$ (per $x \neq 0$):

Si ha: $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to 0^+/0^-} g(x) = \pm\infty$ mentre

$$g'(x) = \frac{(8x^3+42x)x - 2x^4 - 21x^2 - 27}{x^2} = \frac{6x^4+21x^2-27}{x^2}$$

e $g'(x) = 0 \iff x = \pm 1$ (l'eq $6t^4+21t-27$ ha radici 1 e $-\frac{9}{2}$)

Possiamo allora disegnare il grafico di g (in rosso) e le soluzioni



Risultano importanti le due curve y tali che

$y(1) = 25$ e $y(-1) = -25$.

La prima si ottiene per

$$25 = (1+9)\left(\frac{y_0}{9} - 2 - 5\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{5}{2} + 2 + 5\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y_0}{9}$$

$$\Updownarrow$$

$$y_0 = \frac{81}{2} + 45\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) =: \bar{y}$$

(mentre la seconda si ottiene per $y_0 = -\bar{y}$).

(d) Dal grafico trovato si evince che $y(x)$ è strettamente decrescente se e solo se $-\bar{y} \leq y_0 \leq \bar{y}$