Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 1 giugno 2010.
FILA A

1. Sia consideri l'equazione differenziale
$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$
con condizioni iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Allora (1/-1 p. a domanda)

NO (a) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$; (b) $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$; SI'

NO (c) $y(1) = e^3 + e^2$; (d) $y'(-1/2) = 3e^{-3/2}$; SI'

2. L'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^\alpha(1 + x^3)}\,dx$$
risulta finito per (2/-.5 punti)

$(a)\ -2 < \alpha < 3,$ $(b)\ -2 < \alpha < 1,$ $(c)\ 0 < \alpha < 3,$ $(d)\ 0 < \alpha < 1.$

3. Si dica, in ognuno dei due casi seguenti, se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$) converge, ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) o non converge $\boxed{\text{NC}}$) (3/-0,75 punti ciascuno).

$\boxed{\text{AC}}$ $(a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1 + n^3},$ $(b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ $\boxed{\text{C}}$

4. Si calcoli il seguente integrale improprio (se esiste) (8 punti)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2}\,dx \qquad \boxed{= \frac{\pi}{4}}$$

5. Sia dato $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale (definita su tutto $\mathbb{R}$):
$$y' = 2y + x^2 - 1, \qquad y(0) = y_0.$$
   (a) Si scriva la soluzione $y(x)$ con la condizione iniziale $y(0) = y_0$ (3 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to \pm\infty$ (4 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (4 p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha tre soluzioni (4 p.).

TEMPO DISPONIBILE: **UN'ORA E MEZZA**
DURANTE IL COMPITO NON È CONSENTITO USCIRE.
DEVE ESSERE CONSEGNATO **SOLO IL FOGLIO RISPOSTE** (insieme ai due fogli spillati - il testo si può tenere)

NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.
PER GLI ESERCIZI 1-4 **CONTA SOLO LA RISPOSTA**.
GLI ESERCIZI 1 e 2 COMPORTANO PUNTEGGI NEGATIVI (gli altri no). IN CASO DI MANCATA RISPOSTA IL PUNTEGGIO È NULLO
L'ESERCIZIO 5 **VA SVOLTO** NEI FOGLI SPILLATI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

PER LA SUFFICIENZA È NECESSARIO RIPORTARE (contemporaneamente):
(a) UN VOTO MAGGIORE O EGUALE A 8 NEGLI ESERCIZI 1-4,
(b) UNA MEDIA COMPLESSIVA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 1 giugno 2010.
FILA B

1. Sia consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Allora (1/-1 p. a domanda)

NO (a) $y(1) = e^3 + e^2$; (b) $y'(-1/2) = 3e^{-3/2}$; SI!
NO (c) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$; (d) $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$; SI!

2. L'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^\alpha(1 + x^3)}\,dx$$

risulta finito per (2/-.5 punti)

(a) $-2 < \alpha < 1$, (b) $0 < \alpha < 3$, (c) $0 < \alpha < 1$, (d) $\boxed{-2 < \alpha < 3.}$

3. Si dica, in ognuno dei due casi seguenti, se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$) converge, ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) o non converge $\boxed{\text{NC}}$) (3/-0,75 punti ciascuno).

$\boxed{\text{C}}$ (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1 + n^3}$ $\boxed{\text{AC}}$

4. Si calcoli il seguente integrale improprio (se esiste) (8 punti)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 2e^x + 2}\,dx = \boxed{\frac{3}{4}\pi}$$

5. Sia dato $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale (definita su tutto $\mathbb{R}$):

$$y' = 2y + x^2 - 1, \qquad y(0) = y_0.$$

(a) Si scriva la soluzione $y(x)$ con la condizione iniziale $y(0) = y_0$ (3 p.);
(b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to \pm\infty$ (4 p.);
(c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (4 p.);
(d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha tre soluzioni (4 p.).

TEMPO DISPONIBILE: **UN'ORA E MEZZA**
DURANTE IL COMPITO NON È CONSENTITO USCIRE.
DEVE ESSERE CONSEGNATO **SOLO IL FOGLIO RISPOSTE** (insieme ai due fogli spillati - il testo si può tenere)

NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.
PER GLI ESERCIZI 1-4 **CONTA SOLO LA RISPOSTA**.
GLI ESERCIZI 1 e 2 COMPORTANO PUNTEGGI NEGATIVI (gli altri no). IN CASO DI MANCATA RISPOSTA IL PUNTEGGIO È NULLO
L'ESERCIZIO 5 **VA SVOLTO** NEI FOGLI SPILLATI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

PER LA SUFFICIENZA È NECESSARIO RIPORTARE (contemporaneamente):
(a) UN VOTO MAGGIORE O EGUALE A 8 NEGLI ESERCIZI 1-4,
(b) UNA MEDIA COMPLESSIVA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 1 giugno 2010.
FILA C

1. Sia consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Allora (1/-1 p. a domanda)

SI (a) $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$; (b) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$; NO

SI (c) $y'(-1/2) = 3e^{-3/2}$; (d) $y(1) = e^3 + e^2$; NO

2. L'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^\alpha(1 + x^3)}\, dx$$

risulta finito per (2/-.5 punti)

$(a)\ 0 < \alpha < 3$, $(b)\ 0 < \alpha < 1$, $(c)\ \boxed{-2 < \alpha < 3,}$ $(d)\ -2 < \alpha < 1$.

3. Si dica, in ognuno dei due casi seguenti, se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$) converge, ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) o non converge $\boxed{\text{NC}}$) (3/-0,75 punti ciascuno).

$\boxed{\text{AC}}$ $(a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1 + n^3}$, $(b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ $\boxed{\text{C}}$

4. Si calcoli il seguente integrale improprio (se esiste) (8 punti)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 5}\, dx = \boxed{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2}$$

5. Sia dato $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale (definita su tutto $\mathbb{R}$):

$$y' = 2y + x^2 - 1, \qquad y(0) = y_0.$$

(a) Si scriva la soluzione $y(x)$ con la condizione iniziale $y(0) = y_0$ (3 p.);
(b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to \pm\infty$ (4 p.);
(c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (4 p.);
(d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha tre soluzioni (4 p.).

TEMPO DISPONIBILE: **UN'ORA E MEZZA**
DURANTE IL COMPITO NON È CONSENTITO USCIRE.
DEVE ESSERE CONSEGNATO **SOLO IL FOGLIO RISPOSTE** (insieme ai due fogli spillati - il testo si può tenere)

NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.
PER GLI ESERCIZI 1-4 **CONTA SOLO LA RISPOSTA**.
GLI ESERCIZI 1 e 2 COMPORTANO PUNTEGGI NEGATIVI (gli altri no). IN CASO DI MANCATA RISPOSTA IL PUNTEGGIO È NULLO
L'ESERCIZIO 5 **VA SVOLTO** NEI FOGLI SPILLATI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

PER LA SUFFICIENZA È NECESSARIO RIPORTARE (contemporaneamente):
(a) UN VOTO MAGGIORE O EGUALE A 8 NEGLI ESERCIZI 1-4,
(b) UNA MEDIA COMPLESSIVA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 1 giugno 2010.
FILA D

1. Sia consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Allora (1/-1 p. a domanda)

SÌ (a) $y'(-1/2) = 3e^{-3/2}$; (b) $y(1) = e^3 + e^2$; NO
SÌ (c) $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$; (d) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$; NO

2. L'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^\alpha(1 + x^3)}\, dx$$

risulta finito per (2/-.5 punti)

(*a*) $0 < \alpha < 1$, (*b*) $\boxed{-2 < \alpha < 3}$, (*c*) $-2 < \alpha < 1$, (*d*) $0 < \alpha < 3$.

3. Si dica, in ognuno dei due casi seguenti, se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$) converge, ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) o non converge $\boxed{\text{NC}}$) (3/-0,75 punti ciascuno).

$\boxed{\text{C}}$ (*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1 + n^3}$ $\boxed{\text{AC}}$

4. Si calcoli il seguente integrale improprio (se esiste) (8 punti)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 5}\, dx \quad = \boxed{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(2)}$$

5. Sia dato $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale (definita su tutto $\mathbb{R}$):

$$y' = 2y + x^2 - 1, \qquad y(0) = y_0.$$

(a) Si scriva la soluzione $y(x)$ con la condizione iniziale $y(0) = y_0$ (3 p.);
(b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to \pm\infty$ (4 p.);
(c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (4 p.);
(d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha tre soluzioni (4 p.).

TEMPO DISPONIBILE: **UN'ORA E MEZZA**
DURANTE IL COMPITO NON È CONSENTITO USCIRE.
DEVE ESSERE CONSEGNATO **SOLO IL FOGLIO RISPOSTE** (insieme ai due fogli spillati - il testo si può tenere)

NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.
PER GLI ESERCIZI 1-4 **CONTA SOLO LA RISPOSTA**.
GLI ESERCIZI 1 e 2 COMPORTANO PUNTEGGI NEGATIVI (gli altri no). IN CASO DI MANCATA RISPOSTA IL PUNTEGGIO È NULLO
L'ESERCIZIO 5 **VA SVOLTO** NEI FOGLI SPILLATI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

PER LA SUFFICIENZA È NECESSARIO RIPORTARE (contemporaneamente):
(a) UN VOTO MAGGIORE O EGUALE A 8 NEGLI ESERCIZI 1-4,
(b) UNA MEDIA COMPLESSIVA MAGGIORE O EGUALE A 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 1 GIUGNO 2010

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: A

1. (a) SI ~~NO~~ (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO
2. ~~a~~ b c d e NESSUNA DELLE PRECEDENTI
3. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC
4. $\frac{\pi}{4}$ NON ESISTE

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 5.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 1 GIUGNO 2010

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	B

1. (a) SI ~~NO~~ (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO
2. a b c ~~d~~ e NESSUNA DELLE PRECEDENTI
3. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC
4. $\frac{3}{4}\pi$ NON ESISTE

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 5.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 1 GIUGNO 2010

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	C

1. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) SI ~~NO~~

2. a b ~~c~~ d e NESSUNA DELLE PRECEDENTI

3. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC

4. $\boxed{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(2)}$ NON ESISTE

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 5.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 1 GIUGNO 2010

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: D

1. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) SI ~~NO~~
2. a ~~b~~ c d e NESSUNA DELLE PRECEDENTI
3. (a) AC ~~C~~ NC (b) ~~AC~~ C NC
4. $\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}(2)$ NON ESISTE

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 5.

(1) $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$

Il pol. caratteristico è $P(z) = z^2 - 5z + 6$ che ha radici $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Dunque l'omogenea ha sol. $y_0(x) = A e^{2x} + B e^{3x}$. Dato che 2 è radice di $P(z)$, per trovare una sol part. $\bar{y}(x)$ devo cercarne una della forma

$$\bar{y}(x) = C x e^{2x}$$

Derivando:

$$\bar{y}'(x) = C e^{2x} + 2Cx e^{2x}$$

$$\bar{y}''(x) = 2C e^{2x} + 2C e^{2x} + 4Cx e^{2x} = 4C e^{2x} + 4Cx e^{2x}$$

da cui
$$P(D)\bar{y}(x) = 4Ce^{2x} + \cancel{4Cx e^{2x}} - 5Ce^{2x} - \cancel{10Cx e^{2x}} + \cancel{6Cx e^{2x}} =$$
$$= -Ce^{2x}$$

e allora posso prendere $C = -1$, cioè $\bar{y}(x) = -x e^{2x}$. Dunque

$$y(x) = A e^{3x} + B e^{2x} - x e^{2x}$$

$$y'(x) = 3A3^{x} + 2B e^{2x} - e^{2x} - 2x e^{2x}$$

e inserendo le cond. iniziali: $\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + 2B - 1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3A + 3B = 3 \\ 3A + 2B = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow B = 0 \quad A = 1$

IN DEFINITIVA $y(x) = e^{3x} - x e^{2x}$. ALLORA

$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$ (NO), $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$ (SI)

$y(1) = e^3 - e^2$ (NO), $y'(-1/2) = 3 e^{-3/2}$ (SI)

$\left(y'(x) = 3e^{3x} - e^{2x} - 2x e^{2x} \Rightarrow y'(-1/2) = 3e^{-\frac{3}{2}} - \cancel{e^{-1}} + \cancel{e^{-1}} \right)$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^\alpha (1+x^3)}\, dx$, Pongo $f(x) := \dfrac{1-e^{-x^2}}{x^\alpha(1+x^3)}$

- VICINO A ZERO $f(x) = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x^\alpha(1+o(1))} = \dfrac{1}{x^{\alpha-2}}(1+o(1))$

e dunque f è sommabile in $]0,1] \iff \alpha - 2 < 1 \iff \underline{\alpha < 3}$

- ALL'INFINITO

$$f(x) = \frac{1\,(1+o(1))}{x^\alpha x^3 (1+o(1))} = \frac{1}{x^{\alpha+3}}(1+o(1))$$

e dunque f è sommabile su $[1,+\infty[\iff \alpha+3 > 1 \iff \alpha > -2$

$\Longrightarrow$ IN DEFINITIVA DEVE ESSERE $\boxed{-2 < \alpha < 3}$

(3)

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^3}$ pongo $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{1+n^3}$, allora

$$|a_n| = \frac{n}{1+n^3} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Dunque $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ pongo $a_n = (-1)^n n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Allora $|a_n| = n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) =$

$$n\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{n}{2}\frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right) = \frac{1}{2n}\left(1+o(1)\right)$$

e quindi $\sum |a_n|$ non converge (essendo dell'ordine di $\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n}$)

Peraltro è facile vedere che $|a_{n+1}| \le |a_n|$ da cui la serie converge per Leibniz.

(4) Facciamo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$. Poniamo $y = e^x$

$(e^x\,dx = dy)$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+2y+2} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y+1)^2+1} =$

$$\left[\arctan(y+1)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$ (file A)

Nel caso della file B si arrive (con calcoli analoghi) a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y-1)^2+1} = \left[\arctan(y-1)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

Nelle file C e D si arrive a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y\pm 2)^2+1} = \left[\arctan(y\pm 2)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \mp \arctan(2)$$

(5) $$y' = 2y + x^2 - 1 \qquad y(0) = y_0$$

(a) È un'eq. lineare del I° ordine, e ha l'altro è a coeff. costanti

Si può usare la formula risolutiva o si può anche dire che

$$y(x) = Ae^{2x} + \bar{y}(x)$$

dove $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c \implies \bar{y}'(x) = 2ax + b$ da cui

la condizione

$$2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2 - 1 \iff$$

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = -1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} a = -1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \end{array}$$ per cui

$$\boxed{y(x) = c\,e^{2x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}}\ ,\ \text{dove}\ c + \frac{1}{4} = y_0 \iff \boxed{c = y_0 - \frac{1}{4}}$$

(b)

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \iff y_0 > \frac{1}{4} \\ -\infty & \text{se } c \leq 0 \iff y_0 \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

(il caso $c=0$ corrisponde a $y(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$)

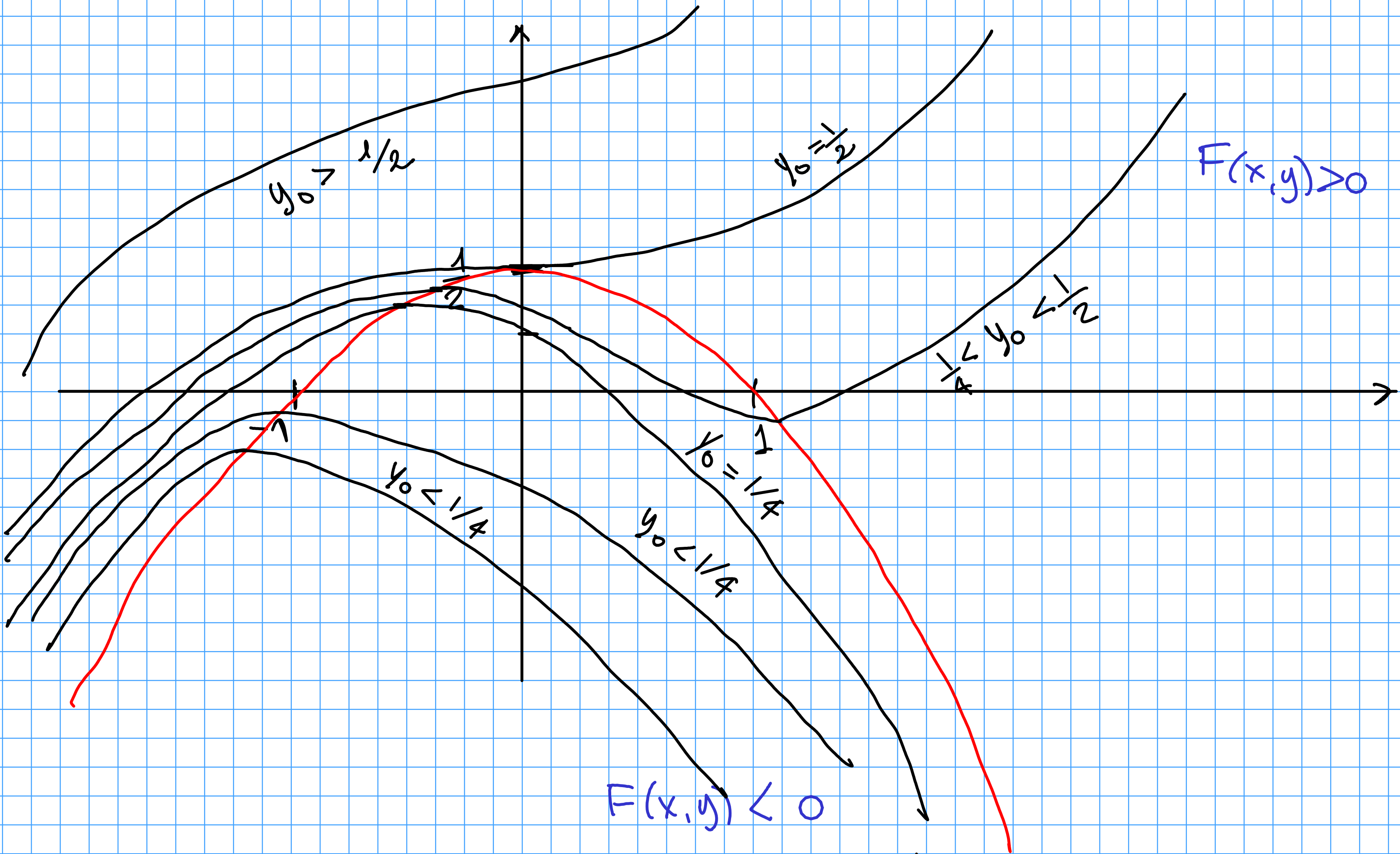
$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$$ ($\forall c$ vince la parabola)

(d) Poniamo $F(x,y) = 2y + x^2 - 1$ (dunque l'eq. è $y' = F(x,y)$)

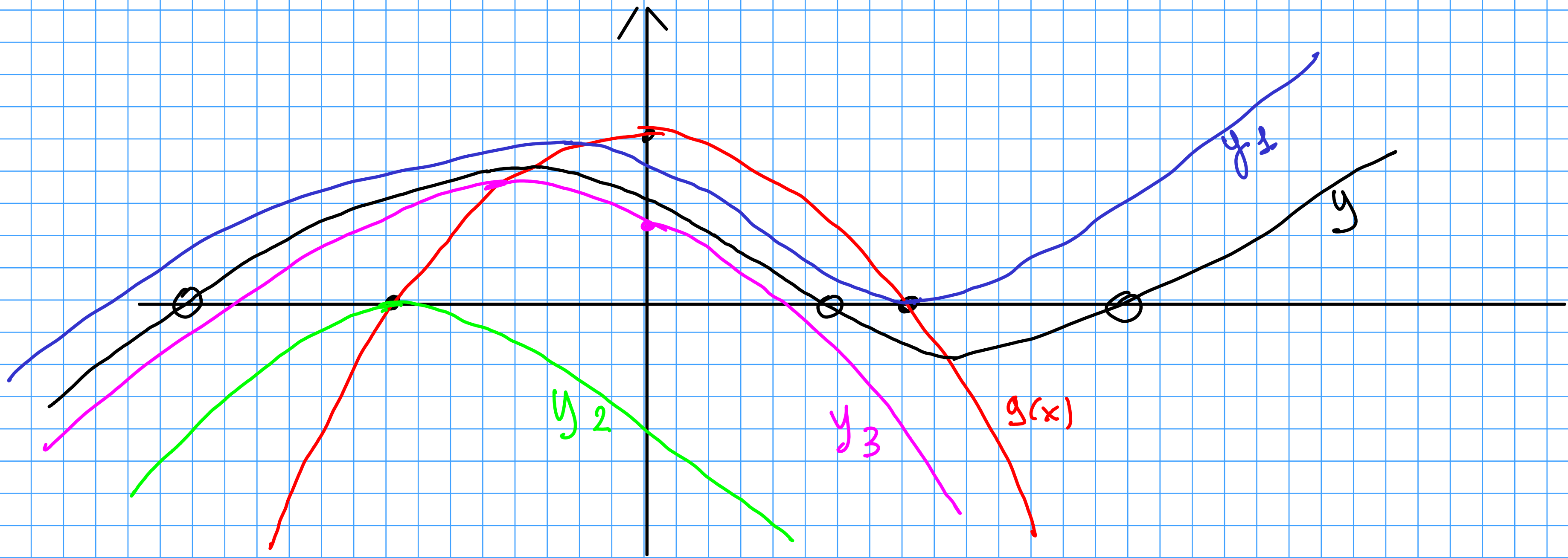
si ha $F(x,y) \geq 0 \iff y \geq \frac{x^2-1}{2} =: g(x)$

Tracciamo il grafico di $g(x)$ (in rosso); (è una parabola)

e di conseguenza i grafici delle $y(x)$



(d) Notiamo che la (parabola) $g(x)$ incrocia $y=0$ nei due punti ± 1. Siano y_1 la soluzione con $y_1(1)=0$ e y_2 la soluzione con $y_2(-1)=0$. Per i soliti motivi tali curve sono fatte come sotto:



Abbiamo anche lasciato la sol. y_3 con $y_3(0)=\frac{1}{4}$ (che è la prima che tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$). Si vede che $y_3 > y_2$ perché deve essere $y_2(0) < 0 < \frac{1}{4} = y_3(0)$. Dai grafici sopra si evince che, per avere la sol. di $y(x)=0$ la $y(x)$ deve stare tra y_3 e y_1. Questo vuol dire $y_3(0) < y_0 < y_1(0)$. Vediamo quanto fa $y_3(0)$. Deve essere $0 = ce^{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \iff c = e^{-2}\frac{3}{4}$ $\iff y_0 = \frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$. Allora

$$\boxed{\frac{1}{4} < y_0 < \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2}}$$