Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Esempio di Compitino 2010/2011.

1. Scrivere la definizione di $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (3p.)

Per ogni numero reale C esiste un numero reale M tale che: se $X < M$ allora $f(x) > C$

2. Si riporti di seguito l'enunciato del teorema di Weierstrass (3p.).

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esistono x_1 e x_2 in $[a, b]$ tali che

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$

(f ammette massimo e minimo)

3. Si scriva la formula di Taylor, con la valutazione del resto secondo Lagrange (3p.).

Sia f derivabile $n+1$ volte in un intervallo I, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$.
Allora per ogni x esiste t compreso tra x e x_0 per cui
$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)(x - x_0)^n}{(n+1)!}$, dove $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$.

4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

(a) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^4 + n^2 + 5\ln(n^5)}{n^2 - 4n + 7\sqrt{n^8 + 1}} =$ 1/7 (b) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\ln(n)} =$ 1

5. Calcolare il seguente limite di funzione (7 punti)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x)^{\frac{1}{x}} - e^{-2x}}{x^3} = -4/3$$

6. Studiare la funzione f definita da $f(x) := \frac{1}{4\arctan(x) - \pi x}$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (8 punti in tutto). Suggerimento: si studi prima il reciproco di f. Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 100$ (2 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 4 E 5 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 6 VA SVOLTO E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.
AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-5 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.

4a) $$\frac{n^4+n^2+5\ln(n^5)}{n^2-4n+7\sqrt{n^8+1}} = \frac{1\,\cancel{n^4}}{1\,\cancel{n^4}}\;\frac{1+1/n^2+25\ln(n)/n^4}{1/n^2-4/n^3+7\sqrt{1+1/n^8}} \to \frac{1}{7}$$

perché $\frac{1}{n^2}\to 0$, $\frac{\ln(n)}{n}\to 0$, $\frac{4}{n^3}\to 0$, $\frac{1}{n^8}\to 0 \Rightarrow 7\sqrt{1+1/n^8}\to 7$

(quello meno ovvio è $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x)}{n}=0$, che però è un limite noto - oppure si può ricavare con de l'Hôpital passando a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$).

4b) $$\sqrt[n]{\ln(n)} = e^{\frac{1}{n}\ln(\ln(x))}.$$ Si ha $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln(n))}{n}=0$

da cui $\sqrt[n]{\ln(n)} \longrightarrow 1$. Per vedere si può ragionare così:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \left(\begin{array}{c}\text{cambio di}\\ \text{variabile } y=\ln(x)\end{array}\right)$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0\cdot 0 = 0$$

— oppure usare de l'Hôpital.

5) Conviene scrivere: $\cos(2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\cos(2x))}$. Allora

$$\frac{1}{x}\ln(\cos(2x)) = \frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o(x^4)\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4)\right) =$$

$$\frac{1}{x}\left[-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-2x^2+o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(-2x^2+o(x^2)\right)^2\right)\right] =$$

$$\frac{1}{x}\left[-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)-2x^4+o(x^4)+o\left(x^4+o(x^4)\right)\right] =$$

$$\frac{1}{x}\left[-2x^2-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)\right] = -2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3) \Rightarrow \text{(passando all'esponenziale)}$$

$$\cos(2x)^{\frac{1}{x}} = e^{-2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)} = 1+\left(-2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-2x+o(x^2)\right)^2+\frac{1}{6}\left(-2x+o(x)\right)^3+o\left(\left(-2x+o(x)\right)^3\right) =$$

$$1-2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)+\frac{(-2x)^2}{2}\left(1+o(x)\right)^2+\frac{(-2x)^3}{6}\left(1+o(1)\right)^3+o\left(\frac{(-2x^2)^3}{6}(1+o(1))\right)$$

$$=1-2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)+2x^2\left(1+2o(x)+o(o(x))\right)-\frac{4}{3}x^3(1+o(1))+o\left(x^3(1+o(1))\right) =$$

$$=1-2x-\frac{4}{3}x^3+2x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3) = 1-2x+2x^2-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)$$

- $$e^{-2x} = 1-2x+\frac{(-2x)^2}{2}+\frac{(-2x)^3}{6}x^3+o(x^3) = 1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$ DA CUI

$$\frac{\cos(2x)^{\frac{1}{x}} - e^{-2x}}{x^3} = \frac{1-2x+2x^2-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)-\left(1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}$$

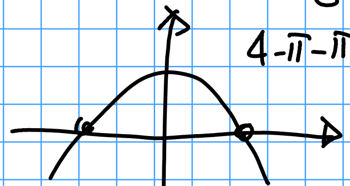
$$= \frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} \xrightarrow[\text{se } x\to 0]{} -\frac{4}{3}$$

6) $f(x) = \dfrac{1}{4\operatorname{arctg}(x) - \pi x}$. Prendiamo $g(x) = 4\operatorname{arctg}(x) - \pi x$

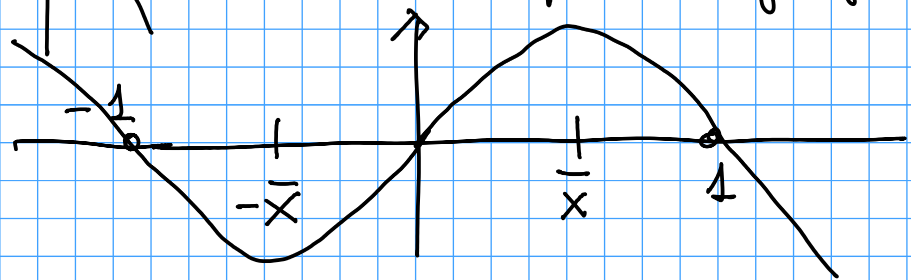
che è definita su tutto $\mathbb{R}$. Allora

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} - \infty = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2} + \infty = +\infty$
- $g'(x) = \dfrac{4}{1+x^2} - \pi = \dfrac{4-\pi-\pi x^2}{1+x^2}$. $g'(x) = 0 \iff x = \pm\underbrace{\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}}_{\bar{x}}$.

inoltre g' è positiva per valori interni a $\left[-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}, \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}\right]$

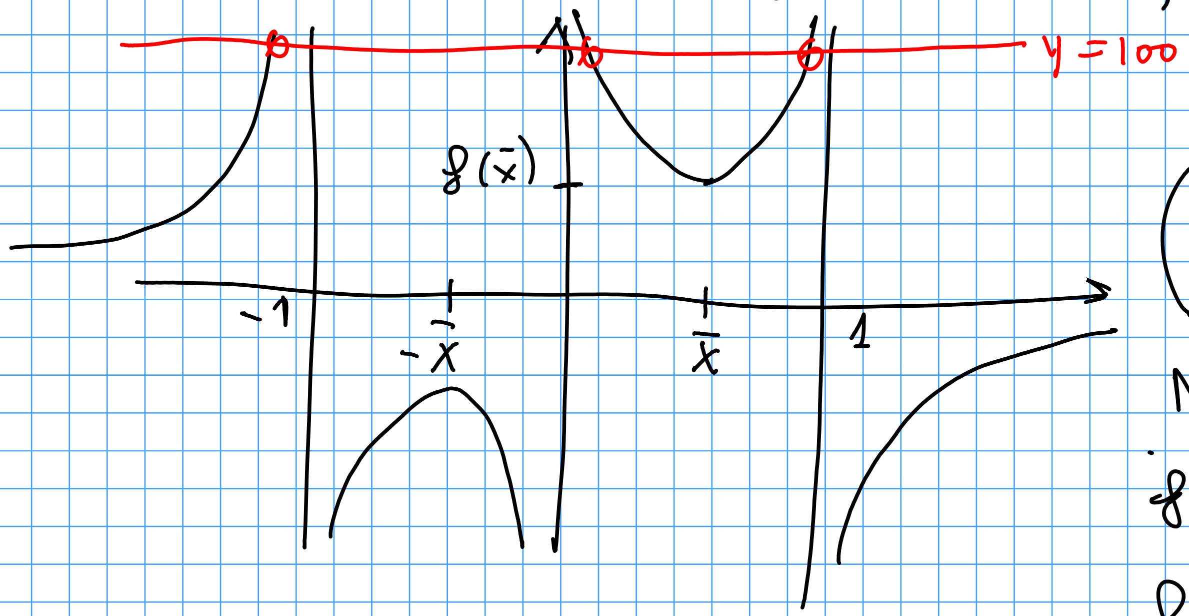


Dunque il grafico di $g(x)$ è:



Si può notare che g è dispari ($g(-x) = -g(x)$) e che gli zeri sono ± 1

dato che $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Dato che passando al reciproco si invertono crescenza e decrescenza, il grafico di f è come segue:



Il valore $f(\bar{x})$ è

$$\left(4 \arctan\left(\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}\right) - 3\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}\right)^{-1}$$

Non è difficile vedere che $f(\bar{x}) < 100$ per cui l'equazione $f(x) = 100$ ha <u>TRE</u> soluzioni