(1) $f(x) = \dfrac{\sin(|x|) - |x|}{x}$.

Notiamo che f è continua e derivabile (di qualunque ordine) se $x \neq 0$

Invece in zero, usando Taylor, si ha $f(x) = \left(|x| - \dfrac{|x|^3}{6} + o(|x|^3) - |x| \right) \dfrac{1}{x}$

$= -\dfrac{|x|^3}{x}\left(\dfrac{1}{6} + o(1)\right)$. ALLORA

- $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ è continua}}$ in zero e dunque in $\mathbb{R}$

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{|x|^3}{x^2}\left(\dfrac{1}{6} + o(1)\right) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ è derivabile}}$

- $f(-x) = \dfrac{\sin(|-x|) - |-x|}{-x} = \dfrac{\sin(|x|) - |x|}{-x} = -f(x) \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ è dispari}}$

- Dato che f è continua f ha massimo e minimo in $[-1, 1]$

se invece $|x| \geq 1$ si ha $|f(x)| \leq \dfrac{1 + |x|}{|x|} = \dfrac{1}{|x|} + 1 \leq 2$

questo è ≤ 1

Dunque $\boxed{f \text{ è limitata su } \mathbb{R}}$

② $a_n = \dfrac{(-1)^3}{n+A}$ $(A>0)$. Allora

$a_{2n} = \dfrac{1}{2n+A}$ decresce (ed è positivo), $a_{2n} \to 0^+$

$a_{2n+1} = \dfrac{-1}{2n+1+A}$ cresce (ed è negativo), $a_{2n} \to 0^-$

Si vede allora che il $\sup a_n = \max a_n = a_2 = \boxed{\dfrac{1}{A+2}}$

③ ⓐ $\sqrt[n]{\dfrac{2^{2n}+n^4}{A^n-n^2}} = \sqrt[n]{\dfrac{4^n+n^4}{A^n-n^2}} = \dfrac{4}{A}\sqrt[n]{\dfrac{1+n^4/4^n}{1-n^2/A^n}} \to \boxed{\dfrac{4}{A}}$

(perché $A>1$)

ⓑ $\dfrac{\ln^3(1+n)-n}{An+B} = \dfrac{1}{A}\,\dfrac{\frac{\ln^3(1+n)}{n}-1}{1+B/An} = \dfrac{1}{A}\,\dfrac{-1+o(1)}{1+o(1)} \to \boxed{-\dfrac{1}{A}}$

⑤ $y''+y'+y=0$; pol. caratteristico $P(z)=z^2+z+1$

$\to$ RADICI $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

Dunque la sol. generale è

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Dato che $y(0)=0 \Rightarrow \alpha = 0$; allora

$$y'(x) = -\frac{\beta}{2} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \Rightarrow \beta \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

e quindi $y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. Allora:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0 \searrow \mathbb{R} \to \boxed{SI}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$ NON ESISTE $\searrow \mathbb{R} \to \boxed{NO}$

- $y(-x) \neq y(x) \to \mathbb{R}\ \boxed{NO}$

$-\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$

- $y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$$y''(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$- e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \rightarrow \quad y''(0) = -1 \rightarrow \quad Q \to \boxed{S1}$$

7.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{(A^2+x^2)(x+A)}$$

poniamo $x = Ay$, $dx = A\,dx$

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{A \times A \, dy}{(A^2+A^2y^2)(Ay+A)} = \frac{1}{A} \int_0^{+\infty} \frac{y\,dy}{(y^2+1)(y+1)} = \otimes$$

Rid. fratti semplici

$$\frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a(x^2+x)+b(x+1)+c(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c = 0 \\ a+b = 1 \\ b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \quad +c = 0 \\ b - c = 1 \\ b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/2 \\ c = -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \otimes = \frac{1}{2A} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2A} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\right) + \operatorname{arctg}(x) \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2A} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4A}}$$

⑥ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n+n^{A\alpha}+n^{8-B\alpha}}$ — per quali α è convergente??

Se $\displaystyle a_n = \frac{n}{1+n+n^{A\alpha}+n^{8-B\alpha}} = \frac{1}{\frac{1}{n}+1+n^{A\alpha-1}+n^{7-B\alpha}}$ (≥ 0)

allora perché $\sum a_n$ sia convergente <u>basta che</u> uno tra i due esponenti $A\alpha-1$ e $7-B\alpha$ sia <u>maggiore (stretto) di 1</u>

Infatti $\displaystyle a_n \leq \frac{1}{n^{A\alpha-1}}$ e $\displaystyle a_n \leq \frac{1}{n^{7-B\alpha}}$. Questo significa

$\displaystyle \alpha > \frac{2}{A}$ oppure $\displaystyle \alpha < \frac{6}{B}$. Nei compiti i parametri A e B

sono tali che $\displaystyle \frac{2}{4} < 1 < \frac{6}{B}$ e quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\boxed{\forall \alpha}$

$\boxed{4}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{e^{x^2}}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}} =$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x^2}{e^{x^2}}\right)}{1-\cos(x^2)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{1-\cos(x^2)}}$$

ora $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ $\Longrightarrow$

$1-\cos(x^2) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$$\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{1-\cos(x^2)} = \frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)} \to -1$$

e quindi il limite di partenza fa $e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$

$\boxed{8}$

$$(x+1)\,y' = 2y + 4\,\frac{x+1}{x+2} \qquad (x>-1) \qquad y(0)=y_0$$

$$y' = \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x+2}$$

$$y(x) = (x+1)^2 \left(y_0 + 4\int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2(t+2)} \right) = \circledast$$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t+2} = \frac{A(t^2+3t+2) + B(t+2) + C(t^2+2t+1)}{(t+1)^2(t+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ 3A + B + 2C = 0 \\ 2A + 2B + C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A \\ A + B = 0 \\ A + 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ B = 1 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\circledast = (x+1)^2 \left(y_0 + 4\int_0^x \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+2} \right) dt \right) =$$

$$(x+1)^2 \left(y_0 + 4\left[\ln\frac{t+2}{t+1} - \frac{1}{t+1} \right]_0^x \right) = \boxed{(x+1)^2 \left(c + 4\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) - \frac{4}{x+1} \right)}$$

dove $\boxed{c = y_0 - 4\ln(2) + 4} = y_0 - \bar{y}$ dove $\bar{y} := 4\ln(2) - 4$

- $\lim_{x \to -1^+} y(x) = 0^-$ perché $(x+1)^2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \to 0$ e $\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \to -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \iff y_0 > \bar{y} \\ -2 & y_0 = \bar{y} \\ -\infty & \text{se } c < 0 \iff y_0 < \bar{y} \end{cases}$

Nel caso $c = 0$ si può fare così:

$$y(x) = 4(x+1)^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x+1} \right) = 4(x^2+1)^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + o\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)^2\right) - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$= 4(x+1)^2 \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + o\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)^2\right) \right) = -\frac{4}{2} + o(1) \to -2$$

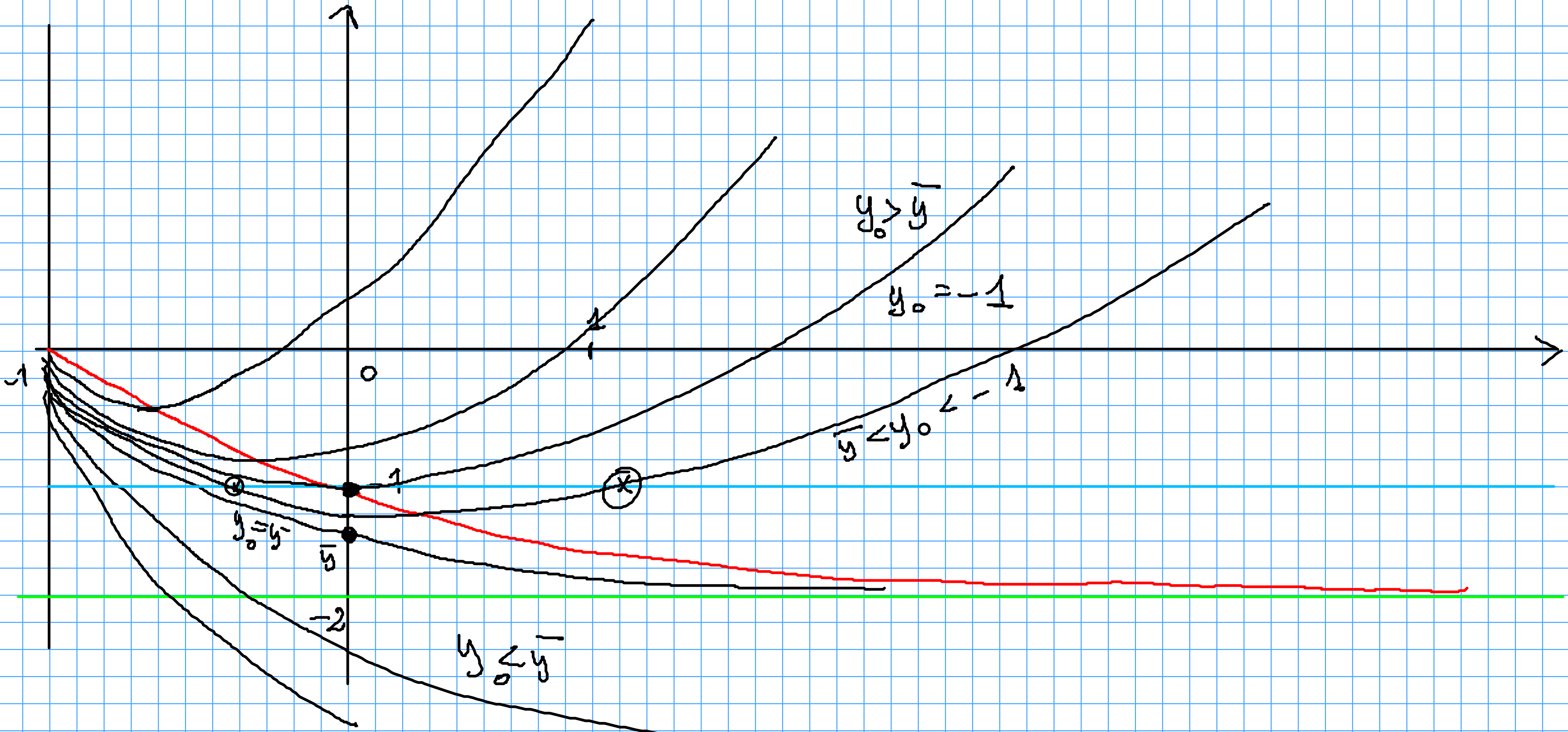
- <u>Monotonia</u> $\quad y' > 0 \iff 2y + \frac{4(x+1)}{x+2} > 0 \iff$

$$y > -\frac{2(x+1)}{x+2} =: g(x).$$

Studio $g(x)$ (per $x > -1$): $\quad g(-1) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -2$

$$g'(x) = -\frac{2}{(x+2)^2} < 0$$

Tracciamo il grafico di g (linea rossa) e poi quello delle sol. $y(x)$ tenendo presente che $y(x)$ cresce / decresce a seconda che $y(x) > g(x)$ / $y(x) < g(x)$



· NOTIAMO CHE $y(0) = -1$ .. Dunque se $y_0 = -1$ la soluzione è sempre ≥ -1 ed è "tangente" in zero a -1

Dunque se $y_0 < -1$ la y INCONTRA la retta $y = -1$ in un punto tra -1 e 0. INOLTRE SE È ANCHE $y_0 > \bar{y}$, $y(x) = -1$ PER UN ALTRO $x > 0$.

DUNQUE $\exists$ 2 SOL. DI $y(x)+1=0$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\bar{y} < y_0 < -1}$