Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 26 gennaio 2009

1. Se $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := x^3 - x$, allora (1/-1 punti a risposta)
   (a) -1 è l'unico punto di minimo relativo;
   (b) f ha estremo superiore finito;
   (c) f ha due punti di massimo relativo;
   (d) f ha due punti stazionari.

2. Se $a_n = n^2$ allora tra le seguenti successioni indicare quella che NON 'e estratta da (a_n) (2/-.5 punti) :
   (a) $b_n = n^2 + 2n + 2$,
   (b) $b_n = n^2 + 4n + 4$,
   (c) $b_n = n^4 + 2n^2 + 1$,
   (d) $b_n = n^4$,
   (e) $b_n = 4n^4$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (2 punti ciascuno)
   (a) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3} - 1)$ (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + n!}$
   (c) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + n^n}{2^n + n^{n+1}}$

4. Calcolare il limite (6 punti – DA SVOLGERE)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \sqrt[4]{1 - 8x^2}}{x^4}$$

5. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC) (punti 1.5/-0.75 per ognuna).
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n) - n}{n^3 + 1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n + 1}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1/n)}{n + 1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(1/n) - 1)$

6. Sia $f(x) := 3x + e^{2x}$. Allora $(f^{-1})'(1)$ vale (punti 2/-0.5):
$$(a)\ \frac{1}{3 + e^2},\quad (b)\ \frac{1}{3 + 2e},\quad (c)\ \frac{1}{5},\quad (d)\ \frac{1}{4},\quad (e)\ 5.$$

7. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio (se esiste) (punti 4):
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(9 + x^2)^2}\, dx$$

8. Si consideri l'equazione differenziale (punti 8 in tutto DA SVOLGERE)
$$y' = \frac{2}{x + 3} y + \frac{x + 3}{1 - x^2} \qquad -1 < x < 1.$$
   (a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y_0$.
   (b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$.
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni più signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.
   (d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) la soluzione $y(x)$ è strettamente crescente in $]-1, 1[$.