Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 27 maggio 2008

1. Il polinomio $P(x) = 1 + 2x + 2x^2$ è il polinomio di ordine 3 della funzione:

   a) $1-\ln(1-2x)$, *b)* e^{2x}, *c)* $\sin(2x)-\cos(2x)$, *d)* $\sin(2x)+\cos(2x)$, *e)* $(1+x)^2+x^2$.

   Svolgimento. La risposta corretta è $(1+x)^2 + x^2 = 1 + 2x + 2x^2$, come si verifica facilmente. $\square$

2. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC).

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n^2]{2}-1\right),\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^4+1},\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arctan(n\pi).$$

   Svolgimento. (a) Converge assolutamente perché è a termini positivi e

$$\sqrt[n^2]{2}-1 = 2^{1/n^2}-1 = e^{\frac{\ln(2)}{n^2}}-1 = \frac{\ln(2)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   (essendo $\sum \frac{\ln(2)}{n^2} < +\infty$);
   (b) è a segni alterni cioè del tipo $\sum(-1)^n a_n$ dove $(-1)^n$ è $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; è facile vedere che (a_n) decresce e tende a zero, dunque la serie converge – però $a_n = \dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ e quindi la serie non converge assolutamente (perché $\sum\frac{1}{n} = +\infty$);
   (c) è ancora segni alterni cioè del tipo $\sum(-1)^n a_n$, dove $(-1)^n$ è $a_n = \dfrac{n^2}{n^4+1}$; dato che $a_n = \dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ e che $\sum\frac{1}{n^2} < \infty$, la serie converge assolutamente (e non serve dire altro);
   (d) non converge perchè il suo termine generale $a_n = (-1)^n\arctan(n\pi)$ non tende a zero; ciò segue dall'osservazione che $|a_n| = \arctan(n\pi) \to \dfrac{\pi}{4}$, per $n \to \infty$. $\square$

3. Se $y(x)$ è la soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{2y} \\ y(2) = -1, \end{cases}$$

   allora

$$y(x) \text{ è definita } \forall x \text{ reale } \boxed{\text{sì} \mid \text{no}},\quad y''(2) = \frac{3}{2}\ \boxed{\text{sì} \mid \text{no}},\quad y(100) > 0\ \boxed{\text{sì} \mid \text{no}}.$$

   Svolgimento. Si tratta di un'equazione a variabili separabili; seguendo la tecnica standard si trova:

$$2y(x)y'(x) = x \Leftrightarrow \int_2^x 2y(\xi)y'(\xi)\,d\xi = \int_2^x \xi\,d\xi \Leftrightarrow \int_{-1}^{y(x)} 2s\,ds = \int_2^x \xi\,d\xi \Leftrightarrow$$
$$y^2(x) - (-1)^2 = \frac{x^2-(2)^2}{2} \Leftrightarrow y^2(x) = 1 + \frac{x^2-4}{2}$$

Dato che $(2) = -1 < 0$ bisognerà prendere la deteminazione negativa della radice, cioè

$$y(x) = -\sqrt{1 + \frac{x^2 - 4}{2}}$$

e tale funzione esisterà fino a quando l'argomento della radice rimane positivo, cioè per

$$x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2} \qquad \text{(stiamo parlando dell'intervallo delle } x \text{ contenente 2)}$$

e dunque y non è definita per ogni x. Inoltre è facile vedere che $y(x) < 0$ per ogni $x > \sqrt{2}$. Infine dall'equazione segue che:

$$y''(x) = \frac{y(x) - xy'(x)}{2y^2(x)} = \frac{y(x) - x\frac{x}{2y(x)}}{2y^2(x)} \Rightarrow y''(2) = \frac{y(2) - \frac{2^2}{2y(2)}}{2y^2(2)} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}.$$

□

4. Data una funzione f definita in un intorno di zero tale che $f(x) = 1 + ax - x^2 + o(x^2)$, e posto $h(x) := \sqrt{f(x)}$ si ha:

$$h''(0) = -1 - \frac{a^2}{4}$$

Svolgimento. Dato che

$$\sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$

si ha:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{1 + \underbrace{ax - x^2 + o(x^2)}_{=y}} =$$

$$1 + \frac{1}{2}(ax - x^2 + o(x^2)) - \frac{1}{8}(ax + o(x^2))^2 + o(O(x)^2) = 1 + \frac{a}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{a^2}{8}x^2 + o(x^2)$$

Per l'unicità dello sviluppo di Taylor deve essere:

$$\frac{h''(0)}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{a^2}{8} \Leftrightarrow h''(0) = -1 - \frac{a^2}{4}$$

□

5. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{a}$$

Svolgimento. Si ha (sostituzione $x = ay$):

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{a}{ay\sqrt{a^2y^2+a^2}}\,dy = \frac{1}{a}\int_1^{+\infty} \frac{1}{y\sqrt{y^2+1}}\,dy$$

Allora:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y\sqrt{y^2+1}}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{2y}{y^2\sqrt{y^2+1}}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{s\sqrt{s+1}}\,ds = \left(\text{ ponendo } t = \sqrt{s+1}\,\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2t}{(t^2-1)t}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{(t^2-1)}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{(t-1)} - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln(|t-1|) - \ln(|t+1|)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \left[\ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = 0 - \ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} =$$

$$\ln\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}} = \ln\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}} = \ln(\sqrt{2}+1).$$

In definitiva il risultato è $\dfrac{\ln(\sqrt{2}+1)}{a}$. $\square$

6. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{4x}{4x^2-1}y + 4x^3 - x \qquad x > \frac{1}{2}.$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(1) = y_0$.

   (b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to +\infty$ e per $x \to \frac{1}{2}$.

   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni più signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.

   (d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) la soluzione y è strettamente crescente sull'intervallo $[1, +\infty[$.

Svolgimento. Applicando la formula risolutiva con $a(x) = \dfrac{4x}{4x^2-1}$ e $b(x) = 4x^3 - x$ si trova $A(x) = \frac{1}{2}\ln(4x^2-1) - \frac{1}{2}\ln(3)$ e quindi:

$$y(x) = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{3}}\left(y_0 + \int_1^x \frac{(4t^3-t)\sqrt{3}}{\sqrt{4t^2-1}}\right) dt = \sqrt{4x^2-1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{3}} + \int_1^x t\sqrt{4t^2-1}\,dt\right) =$$

$$\sqrt{4x^2-1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\int_{\sqrt{3}}^{4x^2-1}\sqrt{s}\,ds\right) = \sqrt{4x^2-1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\left[\sqrt{s^3}\right]_{\sqrt{3}}^{4x^2-1}\right) =$$

$$\sqrt{4x^2-1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\sqrt{(4x^2-1)^3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \sqrt{4x^2-1}\left(c + \frac{1}{12}\sqrt{(4x^2-1)^3}\right) =$$

$$c\sqrt{4x^2-1} + \frac{1}{12}(4x^2-1)^2 \qquad\qquad \text{dove } c = \frac{\sqrt{3}}{3}y_o - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} y(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{se } c \geq 0 \Leftrightarrow y_0 \geq \frac{3}{4}, \\ 0^- & \text{se } c < 0 \Leftrightarrow y_0 < \frac{3}{4}, \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty \qquad (\forall c)$$

Poniamo ora $F(x,y) := \frac{4x}{4x^2-1}y + 4x^3 - x$ e studiamone il segno. Se $x > \frac{1}{2}$

$$F(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{4x^2-1}y \geq -4x^3 + x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}(4x^2-1)^2 =: g(x).$$

Se tracciamo il grafico di g (curva tratteggiata nella figura) e usiamo il fatto che le curve devono essere crescenti (decrescenti) quando passano sopra (sotto) il grafico di g otteniamo la situazione rappresentata in figura. Per l'ultima domanda conviene notare che $g(1) = -\frac{9}{4}$ e tracciare la retta $y = -\frac{9}{4}$: si vede dai grafici (vedi figura 2) che se $y_0 - \geq \frac{9}{4}$ la soluzione cresce sempre per $x \geq 1$, mentre se $y_0 < -\frac{9}{4}$ la soluzione decresce per un intervallo a destra di 1 (anche se poi ridiventa crescente). Quindi la risposta è $y_0 \geq -\frac{9}{4}$.

$\square$

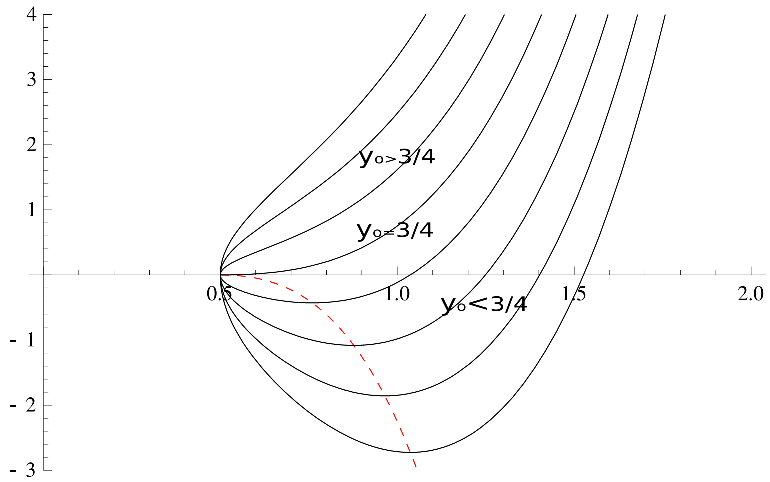

Figura 1: Grafico delle soluzione dell'equazione differenziale

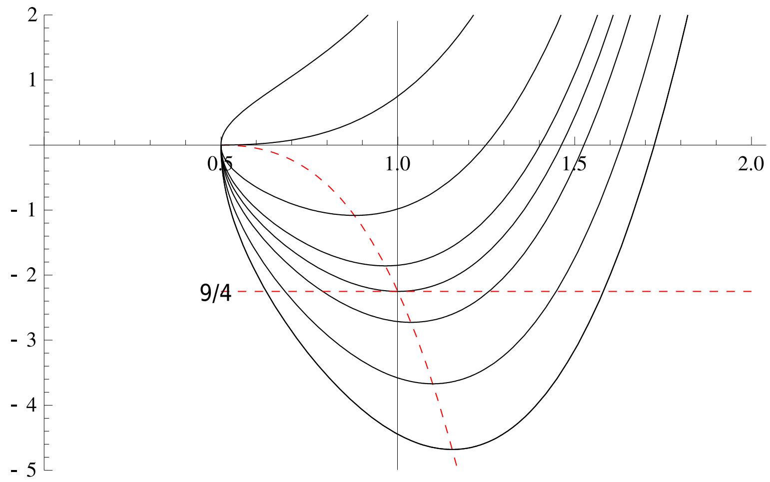

Figura 2: Monotonia per $x \geq 1$