COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 15 aprile 2019 - Appello straordinario - PARTE A

1. Si scriva l'enunciato del teorema del differenziale totale (2p.).

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, se $x_0 \in \Omega$ e se $\forall\, x \in \Omega$ esistono $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ e queste sono continue nel punto x_0 $\Rightarrow$ f è differenziabile in x_0

2. Si dica (giustificando) se l'insieme $\Omega := \{(x, y) : x^4 - y^6 \leq 1\}$ è un dominio regolare (2p.)

Pongo $g(x,y) = x^4 - y^6 - 1$. Allora $\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ -6y^5 \end{pmatrix}$

Mostriamo che non ci sono punti di $\{(x,y) : g(x,y) = 0\}$ che annullano ∇g. Un tale punto dovrebbe verificare

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ -6y^5 = 0 \\ x^4 - y^6 = 1 \end{cases}$$

che è impossibile (dalle prime due ho $x = y = 0$)

DUNQUE Ω è regolare (e $\partial\Omega = \{g(x,y) = 0\}$)

3. Si calcoli l'area di $S := \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1\}$. (3p.).

$A(S) = \boxed{4\pi}$

4. Sia $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2+n!}$. Si scriva l'intervallo I per cui la f è ben definita (1p) e si scriva quanto fa (se esiste) $f''(0)$ (1p.)

$I = \boxed{]-\infty, +\infty[}$ $\quad f''(0) = \boxed{\frac{2}{3}}$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Sia $\vec{f}(x, y)$ un campo vettoriale definito in $\Omega := \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}$. Se per ogni curva chiusa γ con sostegno in Ω vale $\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{s} = 0$, allora $\vec{f}$ è irrotazionale. [VERO] [FALSO]

(b) Siano $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^2$ su un aperto Ω in $\mathbb{R}^5$ e $x_0 \in \Omega$ punto stazionario per f. Chiamiamo $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ gli autovalori della matrice Hessiana di f nel punto x_0. Se $\lambda_4 > 0$, allora x_0 non può essere di massimo relativo per f. [VERO] [FALSO].

(c) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}^2$ se e solo se $|f|$ è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}^2$. [VERO] [FALSO].

(d) Se $R > 0$ è il raggio di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, allora la serie converge per ogni x con $-R \leq x \leq R$. [VERO] [FALSO].

(4) il raggio è il reciproco di $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2+n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\Rightarrow R = +\infty$ dunque f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

So che $a_2 = \frac{f''(0)}{2!} \Leftrightarrow f''(0) = 2a_2 = 2\frac{1}{1+2!} = \frac{2}{3}$

(3) In coordinate sferiche $x = 2\cos\theta\sin\varphi \quad y = 2\sin\theta\sin\varphi \quad z = 2\cos\varphi \quad = \Gamma(\theta, \varphi)$

$\Gamma_\theta = 2\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}\sin\varphi \quad \Gamma_\varphi = 2\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix} \quad \Gamma_\theta \times \Gamma_\varphi = 4\sin\varphi \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\text{ha modulo } 1}$

$\|\Gamma_\theta \times \Gamma_\varphi\| = 4\sin\varphi$.

Inoltre $0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 2\cos\varphi \geq 1 \Leftrightarrow \varphi \in [0, \pi/3] \Rightarrow$

$A(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} 4\sin\varphi \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \cdot 4 \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/3} = 8\pi\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 4\pi$

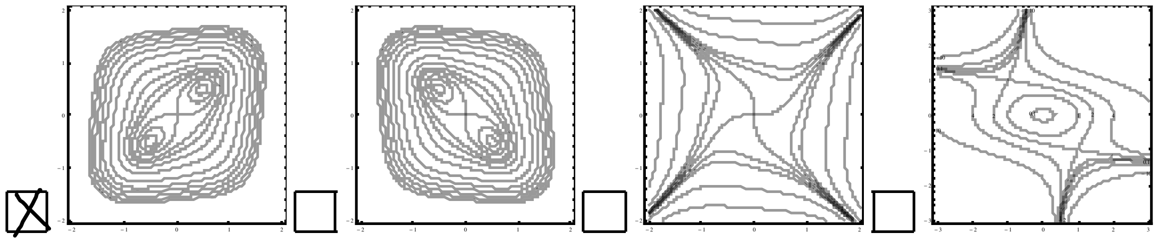
Ingegneria Aerospaziale, Compito del 15 aprile 2019 - Appello straordinario - PARTE B
Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := x^4 + y^4 - 4xy$.

(a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (2p.).

$(x,y) =$ (0,0) punto di SELLA $(x,y) =$ ______ punto di ______
$(x,y) =$ (1,1) punto di MINIMO $(x,y) =$ (−1, −1) punto di MINIMO

(b) Quale dei seguenti diagrammi è plausibile che indichi le linee di livello di f?(0,5p.)



(c) Si dica se f ammette massimo/minimo e in caso affermativo si calcolino tali valori.(1p.).

$\min_{\mathbb{R}^2} f =$ $\boxed{-2}$ / non esiste , $\max_{\mathbb{R}^2} f =$ $\boxed{}$ / ~~non esiste~~.

(d) Posto $M := \{(x,y) : x^4 + y^4 = 2\}$ si dica se f ammette massimo/minimo su M e in caso affermativo si trovino tali valori (2,5p.).

$\min_{M} f =$ $\boxed{-2}$ / non esiste , $\max_{M} f =$ $\boxed{6}$ / non esiste.

Svolgimento

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$. PTO STAZIONARIO $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$ $\Rightarrow x = y^3 = (x^3)^3 = x^9$ $\Updownarrow$ $x = 0$ oppure $x^8 = 1$ $\Updownarrow$ $x = \pm 1$

SE $x = 0$ dal sistema $\Rightarrow y = 0$
SE $x = \pm 1$ dal sistema $y = (\pm x)^3 = \pm 1$. DUNQUE HO I TRE PTI $(0,0)$ e $\pm(1,1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$.

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ che ha det. $-4 < 0$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ SELLA

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ che ha det. $144 - 16 > 0$, $a_{11} = 12 > 0$ $\Rightarrow$ $(1,1)$ PTO di MINIMO

stesso discorso per $(1,-1)$

Dato che $|xy| \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow -4xy \ge -2x^2 - 2y^2 \Rightarrow$

$f(x,y) \ge (x^4 - 2x^2) + (y^4 - 2y^2)$.

Noto che $\lim_{x \to \pm\infty} x^4 - 2x^2 = +\infty$ $\quad \lim_{y \to \pm\infty} y^4 - 2y^2 = +\infty$.

Ora se $\|(x_n, y_n)\| \to \infty$ almeno uno tra $|x_n|$ e $|y_n|$ va a $+\infty$ $\Rightarrow$

$$\lim_{\|(x_n,y_n)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty.$$

Dunque non esiste il massimo di f mentre esiste il minimo di f.

Tale minimo deve essere assunto in un punto critico, ma $(0,0)$ è di sella $\Rightarrow$

$\min_{\mathbb{R}^2} f = f(\pm(1,1)) = 1 + 1 - 4 = -2$

- Se mi metto su M noto che M è chiuso (perché $g(x,y) = x^4 + y^4$ è continua) e limitato (perché – ragionando come sopra – $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} g(x,y) = +\infty$)

Allora f ha massimo e minimo su M.

Notiamo anche che su M $f(x,y) = \underbrace{2 - 4xy}_{h(x)}$ per cui possiamo

studiare h su M usando i moltiplicatori

$$\begin{cases} -4y = \lambda 4 x^3 \\ -4x = \lambda 4 y^3 \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$$

MOLTIPLICO LA I° per x e la II° per y e SOMMO $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} -4xy &= 4\lambda x^4 \\ -4xy &= 4\lambda y^4 \\ \hline -8xy &= 4\lambda(x^4+y^4) = 8\lambda \end{aligned}$$

da cui $\lambda = -xy$. VERO INOLTRE CHE $\underline{\lambda \neq 0}$ perché se no

dalla I° $\Rightarrow y = 0$, dalla II° $\Rightarrow x = 0$ e nella III avrei $0 + 0 = 2$.

Dunque $x \neq 0$, $y \neq 0$ e si ha

$$\begin{cases} -4y = -4x^4 y \\ -4x = -4y^4 x \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ y^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (\pm 1, \pm 1)$$

Mettendo questi 4 punti in f trovo due valori

- $2 - 4 = -2$ MINIMO SU M
- $2 + 4 = 6$ MASSIMO SU M

IN EFFETTI I PUNTI DI MINIMO SU M sono i punti di minimo assoluti

Se avessimo usato i moltiplicatori con f (e non con h) avremmo trovato

$\lambda = 0$ nei punti $\pm(1,1)$

2. Siano:

$$\vec{f}(x,y,z) := (y^2 + 2ze^{xy})\vec{\mathbf{i}} + (x^2 - 2ze^{xy})\vec{\mathbf{j}} + (x^2y^2 + z^2e^{xy}(x-y))\vec{\mathbf{k}},$$
$$P := \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$$
$$B := \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1, z = 0\}, \quad L := \{(x,y,z) : z = 1 - x^2 - y^2, x^2+y^2 \le 1\}.$$

Consideriamo su B e su L l'orientamento delle normali concordi con l'asse z (cioè con $\vec{\mathbf{k}}$).

(a) Si dica (1p.), giustificando la risposta, se $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore $\vec{F}$

$\vec{f}$ $\boxed{\text{ammette un potenziale vettore}}$ X , $\vec{f}$ $\boxed{\text{non ammette un potenziale vettore}}$

(b) Si calcoli $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ($\vec{F}$ è il potenziale vettore del punto precedente) dove γ è una curva chiusa che percorre il bordo della "base" B, girando in verso antiorario attorno all'asse z (3p.).

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \boxed{\frac{\pi}{24}}.$$

(c) Si calcoli il flusso (uscente) di $\vec{f}$ attraverso la frontiera di P (1p.).

$$\iint_{\partial P} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{0}.$$

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso L (1p).

$$\iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{\pi}{24}}.$$

Svolgimento

(a) $\operatorname{div}(\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3 = 2zye^{xy} - 2zxe^{xy} + 2z(x-y)e^{xy} = 0$

$\Rightarrow$ Esiste il pot. vettore $\vec{F}$

NON SI CHIEDE DI CALCOLARE $\vec{F}$

(b) USO STOKES: $\oint_\gamma \vec{F} = \iint_B \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iint_B \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \overset{(*)}{=}$ dove

si deve scegliere $\vec{\nu} = \vec{k}$ come normale a B, in modo da rispettare la compatibilità con il verso di γ. DUNQUE

$(*) = \iint_B \underbrace{f_3(x,y,0)}_{\vec{f} \cdot \vec{k}}\, dx\, dy$ = (coordinate polari) $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho\, \rho^2 \cos^2\theta\, \rho^2 \sin^2\theta =$

$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^5\, d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin 2\theta)^2}{4} d\theta \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi}{24}$

(c) $$\iint_{\partial P} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iiint_P \operatorname{div}\vec{f}\, dx\,dy\,dz = 0$$ perché $\vec{f}$ ha divergenza nulla

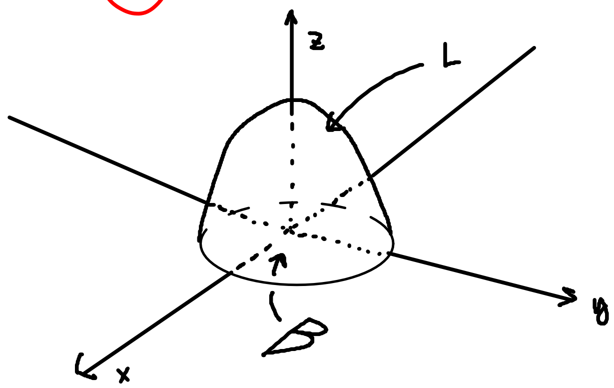
(d) Se $P = \{0 \le z \le 1-x^2-y^2\} \Rightarrow \partial P = \underbrace{\{z=0,\ x^2+y^2\le 1\}}_{B} \cup \underbrace{\{0\le z = x^2+y^2\}}_{L}$

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE $\iint_B \vec{f}\cdot\vec{k} = \frac{\pi}{24}$

PERÒ SE B deve essere orientato come ∂P (normale uscente da P) $\Rightarrow \vec{\nu} = -\vec{k}$

$$\Rightarrow 0 = \iint_{\partial P} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint_B \vec{f}\cdot(-\vec{k})\, d\sigma + \iint_L \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = -\frac{\pi}{24} + \iint_L \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma \Rightarrow$$

$$\iint_L \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \frac{\pi}{24}$$



3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$(9-x^2)y'' + 3xy' + 5y = 0$$

e se ne cerchino le soluzioni y esprimibili come serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(a) Si cerchi una relazione ricorsiva che permette di calcolare gli a_n (2p.):

$(\mathcal{R})$ $\boxed{a_{n+2} = \dfrac{n-5}{9(n+2)} a_n \qquad n \geq 0 \qquad (a_0 \text{ e } a_1 \text{ sono liberi})}$

(b) Si deduca che esiste una unica soluzione y tale che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Si mostri che tale soluzione ha raggio di convergenza $R = 3$ (2p.) e si calcoli (1p.) $y'''(0)$.

$y'''(0) = \boxed{0}$

(c) Si mostri che esiste un'unica soluzione $\tilde{y}$ che verifichi le condizioni $\tilde{y}(0) = 0$, $\tilde{y}'(0) = 1$, si dica qual è il suo raggio di convergenza $\tilde{R}$ (1p.) e la si calcoli esplicitamente (1p.):

$\tilde{R} = \boxed{+\infty}$, $\tilde{y}(x) = \boxed{x - \dfrac{4}{27}x^3 + \dfrac{4}{135}x^5}$

Svolgimento

Se $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{\substack{0 \\ \leftarrow \text{ anche } 1}}^\infty a_n n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{\substack{0 \\ \leftarrow \text{ anche } 1 \text{ o } 2}}^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} =$

$$\sum_{n=0}^\infty a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n \Rightarrow x y'(x) = \sum_0^\infty a_n n x^n \qquad x^2 y''(x) = \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^n$$

DUNQUE

$$(9-x^2)y'' + 3xy' + 5y = \sum_{n=0}^\infty \left\{ 9a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n\left[n(n-1) - 3n - 5\right]\right\} x^n =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ 9(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 - 4n - 5)a_n \right\} x^n =$$

$$\left(t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{4+5} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases} \right)$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ 9(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)(n-5)a_n \right\} x^n =$$

Se eguaglio a zero trovo $9(n+2)\cancel{(n+1)}\, a_{n+2} = \cancel{(n+1)}(n-5)a_n \quad \forall n \geq 0$

$\neq 0$

$$\Leftrightarrow \mathcal{R} \quad a_{n+2} = \frac{1}{9}\,\frac{n-5}{n+2} \quad \forall n \geq 0$$

IN QUESTA RELAZIONE È CHIARO CHE I TERMINI PARI E I TERMINI DISPARI VANNO PER PROPRIO CONTO.

Poniamo $b_m = a_{2m}$ e $c_m = a_{2n+1}$ $\Rightarrow$

$b_{m+1} = a_{2n+2} = \frac{1}{9}\frac{2n-5}{2n+2} a_{2n} = \frac{1}{9}\frac{2n-5}{2n+2} b_m \Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{1}{9}\frac{2n-5}{2n+2} b_n$

$c_n = a_{2n+3} = \frac{1}{9}\frac{2n+1-5}{2n+1+2} a_{2n+1} = \frac{1}{9}\frac{2n-4}{2n+3} c_n \Leftrightarrow c_{n+1} = \frac{1}{9}\frac{2n-4}{2n+3} c_n$

(b) Se metto $y'(0)=0$ ho che $c_0 = a_1 = 0 \Rightarrow c_n = 0\ \forall n \Rightarrow a_m = 0\ \forall m$ dispari.

Invece $y(0)=1=a_0=b_0 \Rightarrow b_m \neq 0\ \forall n.$ ($a_n \neq 0\ \forall m$ dispari) dato che $\frac{1}{9}\frac{2n-5}{2n+2} \neq 0\ \forall n$

Allora $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n} = g(x^2)$ dove. $g(w) = \sum_{m=0}^{\infty} b_n w^n$. Il raggio di convergenza per g è $\tilde{R} = 1/L$ dove

$L = \lim_{m\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{m\to\infty} \frac{2n-5}{2n+2}\frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \tilde{R} = 9$

Allora $y(x)$ converge per $x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3$ mentre non converge se $x^2 > 9$ $(|x|>3)$ Dunque il raggio di conv. di $y(x) = 3$

Inoltre essendo $y'''(0) = a_3 3! \Rightarrow y'''(0) = 0$ (perché 3 è un indice dispari)

(c) Se metto $y(0) = 0 \Rightarrow a_{2n} = 0\ \forall n.$ Noto inoltre che per $n=5$ trovo

$a_7 = 0 \cdot a_5 \Rightarrow a_9 = 0 \Rightarrow a_m = 0\ \forall m$ dispari $m \geq 7$

Rimangono $\# 3$: coefficienti $a_1 = y'(0) = 1$, a_3 e a_5 che si trovano dalla relazione ricorsiva

$n = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1-5}{9(1+2)} a_1 = \frac{-4}{27} a_1 = -\frac{4}{27}$

$n = 3 \Rightarrow a_5 = \frac{3-5}{9(3+2)} a_3 = \frac{-3}{3\cdot 5}\frac{(-4)}{27} = \frac{4}{135}$

$\Rightarrow \tilde{y}(x) = 1 - \frac{4}{27}x + \frac{4}{135}x^3$

Dato che $\tilde{y}(x)$ è definito $\forall x \Rightarrow R = +\infty$

4. ($\boxed{}$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= 4x - 4y \\ y' &= x - y - z \\ z' &= -x + y + z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema e λ_i i suoi autovalori. Indichiamo con $m_A(\lambda_i)$ e $m_G(\lambda_i)$ le molteplicità algebrica e geometrica di ogni λ_i.

(a) si mostri che A ha due autovalori λ_1, λ_2. Si trovino λ_1 e λ_2 con le rispettive molteplicità (1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{0}, m_A(\lambda_1) = \boxed{1}, m_G(\lambda_1) = \boxed{1};$$

$$\lambda_2 = \boxed{2}, m_A(\lambda_2) = \boxed{2}, m_G(\lambda_2) = \boxed{1}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per A (3p.) e la relativa forma di Jordan(1p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{1} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{2e^{2t}(2t+1)}$$

$$y(t) = \boxed{2te^{2t}}$$

$$z(t) = \boxed{-2te^{2t}}$$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) + (-4)(-1)(-1) - (4-\lambda)(1)(-1) - 1(-4)(1-\lambda) =$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2-1) - \cancel{4} + \cancel{4} - \lambda + 4 - 4\lambda =$$

$$4\lambda^2 - \cancel{4} - \lambda^3 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} + \cancel{4} - 4\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda =$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -\lambda(\lambda-2)^2 \Rightarrow \text{DUE AUTOVALORI}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad m_A(\lambda_1) = 1, \ \lambda_2 = 2 \quad m_A(\lambda_2) = 2$$

$\underline{\lambda=0}$ Cerco un elemento e_1 nel $\operatorname{Ker} A$ cioè $e_1=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ con $Ae_1=0 \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases}4x-4y=0\\ x-y-z=0\\ -x+y+z=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}$$ Posso prendere $e_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$\underline{\lambda=2}$ $B=A-2I=\begin{bmatrix}2&-4&0\\1&-3&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}$, $B^2=\begin{bmatrix}0&4&4\\0&4&4\\0&0&0\end{bmatrix}$

Mi serve e_3 tale che $B^2e_3=0$ ma $e_2=Be_3\neq 0$. Se $e_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ la prima condizione equivale a $y+z=0 \Rightarrow e_3=\begin{pmatrix}x\\y\\-y\end{pmatrix}$; posso prendere $e_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ dato che $e_2=B\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\neq 0$

Ho trovato i tre autovettori generalizzati $\Longrightarrow$ $J=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$

(se prendo $\lambda_1=2$, $\lambda_2=0 \Rightarrow J=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ e devo scambiare gli e_i ...)

Per risolvere la parte (c) devo usare la formula

$$Y(t)=e^{At}Y_0 \quad \text{con } Y_0=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}.$$ Ma se $M=[e_1|e_2|e_3] \Rightarrow$

$$Y(t)=Me^{tJ}M^{-1}Y_0 = \quad (\text{dato che } Y_0=2e_3, \text{ e } M\hat{e}_3=e_3 \Leftrightarrow M^{-1}e_3=\hat{e}_3)$$

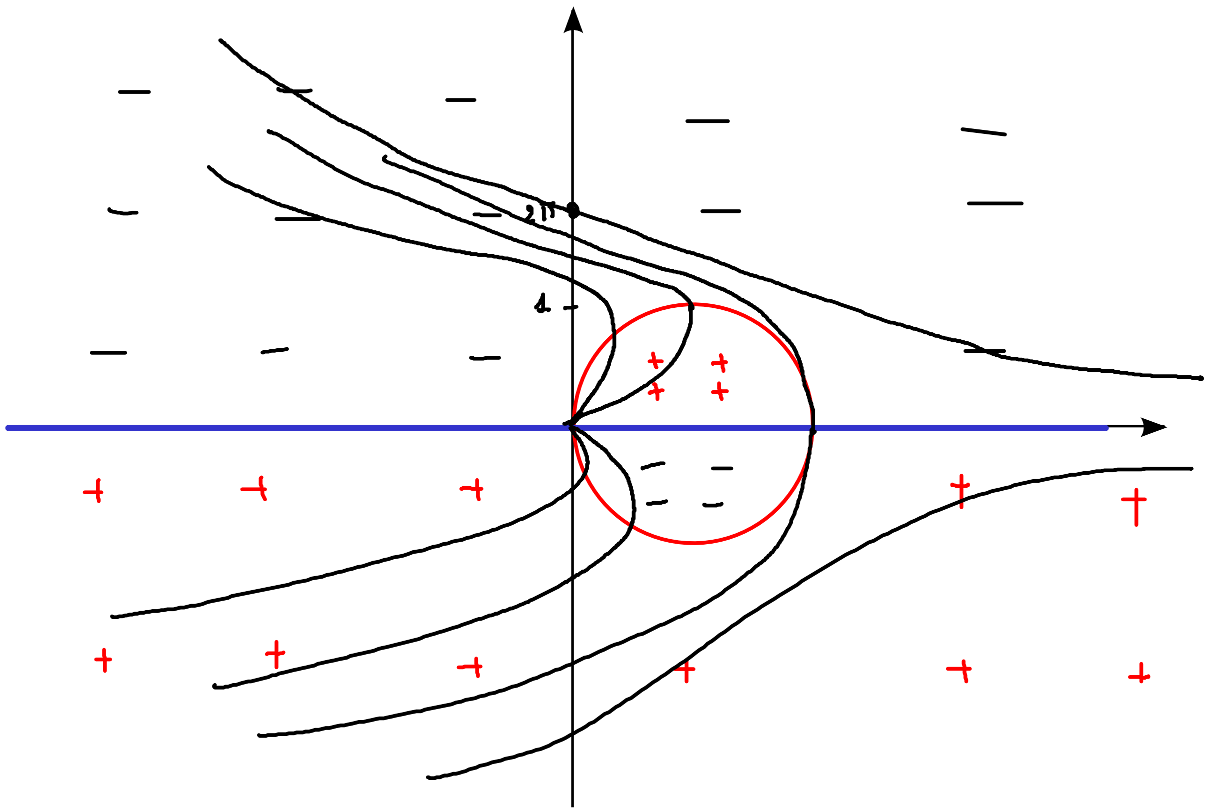
$$Me^{tJ}2\hat{e}_3 = 2M\begin{bmatrix}1&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=$$

$$2M\begin{bmatrix}0\\te^{2t}\\e^{2t}\end{bmatrix} = 2e^{2t}\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\t\\1\end{bmatrix}=2e^{2t}\begin{bmatrix}2t+1\\t\\-t\end{bmatrix}$$

Variante esercizio 4 della seconda parte. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2y}{2x - x^2 - y^2}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovi un fattore integrante $\lambda(x,y)$ per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x,y) = \lambda(x^2+y^2)$. Si trovi poi un integrale primo $\Phi(x,y)$ (4p.).

$$\lambda(x,y) = \boxed{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$\Phi(x,y) = \boxed{y - 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

3. Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa alla condizione iniziale $y(0) = 2\pi$, e se ne riporti (1p.) il grafico nel diagramma della pagina precedente; si mostri in particolare che tale soluzione è definita per tutte le $x \geq 0$. Si trovi infine (1p.)

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \boxed{0}.$$

Svolgimento

- Vediamo dove si annulla il denominatore (a destra)

$$2x - x^2 - y^2 = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x + 1 = 1 \iff (x-1)^2 + y^2 = 1$$

= cerchio di raggio 1 centrato in $(1,0)$ (curva rossa)

- Invece il numeratore si annulla sulla retta $y=0$ (curva blu)

Questa $y=0$ è una soluzione costante (o parte per $x=0$, $x=1$)

- I segni di $\dfrac{2y}{2x - x^2 - y^2}$ sono come nel disegno

$$2x - x^2 - y^2 \geq 0 \iff 1 \geq (x-1)^2 + y^2$$

- Le soluzioni arrivano alla curva rossa con derivata verticale

Fuori dalla zona rossa per ogni punto passa una sola soluzione.

- Cerco il fattore integrante $\lambda(x^2+y^2)$. Deve essere

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(x^2+y^2)\, 2y\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x^2+y^2)(2x - x^2 - y^2)\right) = 0 \iff$$

$$\lambda(x^2+y^2)\, 2 + \lambda'(x^2+y^2)(2y)(2y) + \lambda(x^2+y^2)(2-2x) + \lambda'(x^2+y^2)(2x)(2x - x^2 - y^2) = 0$$

$$\iff \lambda(x^2+y^2)(2+2-2x) + \lambda'(x^2+y^2)\left(4y^2 + 4x^2 - 2x(x^2+y^2)\right) = 0$$

$$\iff \lambda(x^2+y^2)(4-2x) + \lambda'(x^2+y^2)(4-2x)(x^2+y^2) = 0$$

$$\iff \lambda(x^2+y^2) + \lambda'(x^2+y^2)(x^2+y^2) = 0 \iff \lambda(t) + \lambda'(t)\,t = 0$$

Cioè λ verifica $\lambda'(t) - \dfrac{\lambda(t)}{t}$ che significa $\lambda(t) = \dfrac{c}{t}$ $c \in \mathbb{R}$

Prendo $c = 1$ e trovo $\lambda(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

- Cerco ϕ imponendo

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2y}{x^2+y^2} \iff \phi(x,y) = -2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2}{x}\,\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} + c'(y) = \frac{-2x}{x^2+y^2} + c'(y) \text{ che deve essere } \frac{-2x + x^2 + y^2}{x^2+y^2}$$

$$\iff c'(y) = 1 \iff c(y) = y + \text{costante}$$

In definitiva $\phi(x,y) = y - \underbrace{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{\substack{\text{VALE } \pi \text{ se } x=0\ y>0 \\ \text{VALE } -\pi \text{ se } x=0\ y<0}}$

• Se parto da $(0, 2\pi)$ ho $\phi(0,2\pi) = -\pi$

Noto che nel punto $(2, 0)$ si ho

$\phi(2,0) = -2\arctan(0) = 0 > -\pi$ ← questo significa che

la curva $\tilde{y}$ che arriva in $(2, 0)$ (con derivata verticale) è SOTTO

la curva y che parte da $(0, 2\pi)$ $\Rightarrow$ $y(x) \geq \tilde{y}(x)$

DUNQUE $y(x)$ rimane lontana dalla zona rossa $\Rightarrow$

$y(x)$ esiste per $\forall x$. Dal disegno $\Rightarrow$ $y(x)$ decresce

e $y(x) > 0$ $\forall x$. $\Rightarrow$ $\exists\, \ell = \lim_{x \to +\infty} y(x)$.

Se $\ell > 0$ $\Rightarrow -\pi = \lim_{x \to \infty} \phi(x, y(x)) = \lim_{x \to \infty} y - 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) =$

$$\ell - 2\lim_{x \to \infty} \left(\underbrace{\frac{y(x)}{x}}_{+\infty \text{ perché } y(x) \to \ell > 0}\right) = \ell - \pi \quad \Rightarrow -\pi > \ell - \pi \text{ ASSURDO}$$

$\Rightarrow \ell = 0$