Analisi Matematica 1 - Ingegneria Aerospaziale
Compitino del 22 febbraio 2008 - Soluzioni

PRIMA PARTE

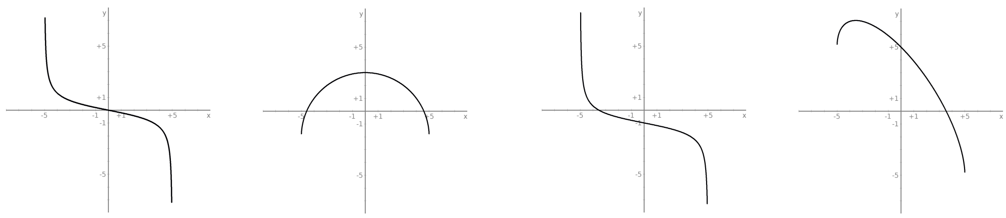
1. Si consideri la successione $(a_n)_{n\geq 2}$ definita da $a_n := \dfrac{(-3)^n+1}{3^n-n}$

   Allora (p. $1/-1$ per domanda)

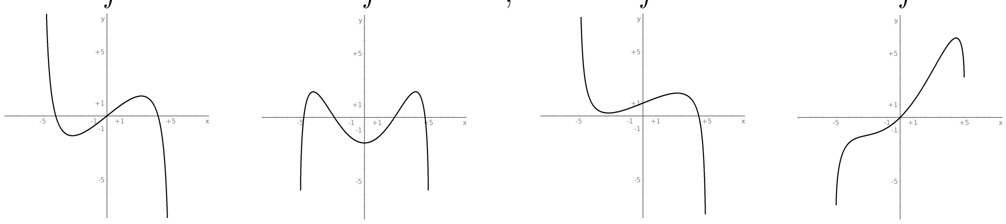
   (a) (a_n) È limitata inferiormente;
   (b) (a_n) È limitata superiormente;
   (c) (a_n) NON ha limite;
   (d) (a_n) AMMETTE una sottosuccessione convergente.

   Spiegazione. Se consieriamo $b_n := a_{2n} = \dfrac{(-3)^{2n}+1}{3^{2n}-2n} = \dfrac{9^n+1}{9^n-2n}$ e $c_n := a_{2n+1} = \dfrac{(-3)^{2n+1}+1}{3^{2n+1}-2n-1} = \dfrac{-3\cdot 9^n+1}{3\cdot 9^n-2n-1}$, si vede facilmente che $b_n \to 1$ e $c_n \to -1$. Ne segue che sia (b_n) che (c_n) sono limitate (superiormente e inferiormente) e quindi (a_n) è limitata. È anche chiaro che (a_n) non ha limite, visto che due estratte hanno limiti diversi e che (a_n) ammette una sottosuccessione convergente (per esempio (b_n)). □

2. Risultano le seguenti associazioni



f' $\longleftarrow$ f ; f' $\longleftarrow$ f



f' $\longleftarrow$ f ; f' $\longleftarrow$ f .

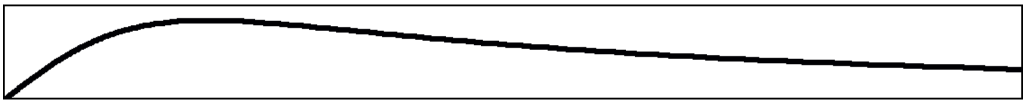
   Per vederlo bisogna usare i seguenti criteri: $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ crescente e f' crescente $\Leftrightarrow f$ convessa.

3. Si considerino la funzione $f(x) := \dfrac{x}{4+x^2}$ e l'intervallo $I := [0,10]$. Si indichi se le affermazioni seguenti sono vere o false. (p. 1/-1 a risposta)

   (a) 2 è il massimo di f su I $\boxed{\text{FALSO}}$ - 2 è un punto di massimo per f, il massimo è $f(2) = \frac{1}{4}$;
   (b) 10 è un punto di minimo relativo per f su I $\boxed{\text{VERO}}$;
   (c) f ha un unico minimo relativo su I $\boxed{\text{FALSO}}$ - ne ha due, uno in $x = 0$ e uno in $x = 10$;

(d) $\frac{1}{8}$ è un valore assunto da f in I $\boxed{\text{VERO}}$ - dato che $\frac{1}{8}$ è tra il massimo (che è $\frac{1}{4}$) e il minimo che è 0.

Con un semplice studio di funzione si arriva in effetti al seguente grafico per f



in cui il massimo viene raggiunto in $x = 2$ e vale $\frac{1}{4}$.

4. Si trovino i seguenti limiti di successioni (p. 2 per domanda):

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n - 2^{n!}}{2+n!} = -\infty; \qquad (b)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^n + 2^n - 1} = 4;$$

$$(c)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{\pi^n (n+1)!} = 0; \qquad (d)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln(n)} = 1.$$

Spiegazione.

$$(a) \qquad \frac{5^n - 2^{n!}}{2+n!} = -\frac{2^{n!}}{n!} \cdot \frac{-\frac{5^n}{2^{n!}} + 1}{2/n! + 1} = -\frac{2^{n!}}{n!} \cdot \frac{-\frac{2^{n\log_2(5)}}{2^{n!}} + 1}{2/n! + 1} = -\frac{2^{n!}}{n!} \cdot \frac{-2^{n\log_2(5)-n!} + 1}{2/n! + 1}$$

e dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n!}}{n!} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$

mentre $\lim_{n\to\infty} 2^{n\log_2(5)-n!} = \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$ si ottiene il risultato;

$$(b) \qquad \sqrt[n]{4^n + 2^n - 1} = 4\sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^n} - 4^{-n}} \to 4 \cdot 1 = 4;$$

$$(c) \qquad \text{usiamo Cesaro: } \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{\pi^{n+1}(n+2)!}}{\frac{n^n}{\pi^n(n+1)!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{n+1}{n+2}\frac{1}{pi} \to \frac{e}{\pi} < 1$$

da cui la successione tende a zero;

(d) usiamo ancore Cesaro:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \to 1$$

da cui la radice n-esima tende a 1.

□

5. Si calcoli il seguente limite (p. 6):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+e^{4ax}} - 2 - ax}{\sin(x^2)\cos(x^2)} = \frac{7}{4}a^2$$

Spiegazione. Si ha (in tutti i passaggi che seguono il segno di = va inteso nel senso che, se la quantità di destra esiste , allora anche la quantità di destra esiste ed esse sono eguali - in questo modo, dato chel'ultima quantit` della catena esiste, tutti gli = hanno effettivamente senso)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+e^{4ax}}-2-ax}{\sin(x^2)\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+e^{4ax}}-2-ax}{\sin(x^2)} = \text{(Hospital)}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4ae^{4ax}}{2\sqrt{3+e^{4ax}}}-a}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{2ae^{4ax}-a\sqrt{3+e^{4ax}}}{2x\cos(x^2)\sqrt{3+e^{4ax}}} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2ae^{4ax}-a\sqrt{3+e^{4ax}}}{x} = \text{(Hospital)}$$
$$\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{8a^2e^{4ax}-a\frac{4ae^{4ax}}{2\sqrt{3+e^{4ax}}}}{1} = \frac{1}{4}\left(8a^2-\frac{4a^4}{4}\right) = \frac{7}{4}a^2.$$

□

SECONDA PARTE
Si studi la seguente funzione (p. 8)

$$f(x) := \frac{4\sqrt{x^2-x}}{1-2x}+\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

trovandone il campo di esistenza, i limiti nei punti di accumulazione del dominio, il segno di $f(x)$, gli intervalli in cui f è crescente/decrescente (non è richiesto lo studio della convessità); si tracci inoltre un grafico qualitativo di f. Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x)-2=0$.

Svolgimento. Per il **dominio** di f dobbiamo considerare tutte le seguenti condizioni

$$x^2-x\geq 0, \quad ,1-2x\neq 0, \quad ,x\neq 0, 1+\frac{1}{x}\geq 0.$$

La prima equivale a $x\leq 0$ oppure $x\geq 1$; la seconda significa $x\neq \frac{1}{2}$, che è contenuta nella prima; la terza equivale a $x\neq 0$ mentre la quarta equivale a $\frac{x-1}{x}\geq 0$ che è verificata se e solo se $x<0$ oppure $x\geq 1$. In definitiva il dominio di f è costituito da

$$]-\infty,0[\cup[1,+\infty[.$$

Consideriamo ora i **limiti** agli estremi del dominio, cioè in $\pm\infty$, in 0^- e in 1^+. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4\sqrt{x^2-x}}{1-2x}+\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4|x|\sqrt{1-1/x^2}}{-2x(-1/2x+1)}+\frac{1}{4} =$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4\sqrt{1-1/x^2}}{2(-1/2x+1)}+\frac{1}{4} = \frac{4}{2}+\frac{1}{4} = \boxed{\frac{9}{4}};$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4\sqrt{x^2-x}}{1-2x}+\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4|x|\sqrt{1-1/x^2}}{-2x(-1/2x+1)}+\frac{1}{4} =$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{1-1/x^2}}{(-2)(-1/2x+1)}+\frac{1}{4} = -\frac{4}{2}+\frac{1}{4} = \boxed{-\frac{7}{4}};$$
$$\lim_{x\to 0^-}f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4\sqrt{x^2-x}}{1-2x}+\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = 0+\infty = \boxed{+\infty};$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{4\sqrt{x^2-x}}{1-2x}+\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = 0+0 = \boxed{0}.$$

È evidente che f è continua sul suo dominio e derivabile in $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$. Tralasciamo per ora lo studio del segno e calcoliamo la **derivata**, per studiare la **monotonia**. Si ha

$$f'(x) = \frac{4\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}(1-2x) - 4\sqrt{x^2-x}(-2)}{(1-2x)^2} + \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}} =$$

$$\frac{-2(2x-1)^2+8(x^2-x)}{\sqrt{x^2-x}(1-2x)^2} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} =$$

$$\frac{-2}{\sqrt{x^2-x}(1-2x)^2} + \frac{1}{8|x|\sqrt{x^2-x}} = \frac{-16|x|+(2x-1)^2}{8|x|\sqrt{x^2-x}(1-2x)^2}.$$

Poiché il denominatore ha segno sempre positivo, il segno della derivata dipende da:

$$g(x) := -16|x| + (2x-1)^2 = -16|x| - 4x^2 - 4x + 1 = \begin{cases} 4x^2 - 20x^2 + 1 & \text{se } x > 0 \\ 4x^2 + 12x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si tratta dunque di trovare le soluzioni di due equazioni di secondo grado (accettandole o meno a seconda del segno). Per le $x < 0$ troviamo

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_{12} := \frac{-6 \pm \sqrt{36-4}}{4} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{2};$$

entrambe accettabili in quanto negative (perché $\sqrt{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3 \Leftrightarrow 8 < 9$). Per le $x > 0$ troviamo

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = y_{12} := \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{6};$$

entrambe tali soluzioni sono positive ma quella col meno risulta minore di 1: $\frac{5}{2} - \sqrt{6} < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 < 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 9 < 24$. Dunque solo quella col più, diciamo y_2, risulta accettabile. Andando a vedere il segno, dato che in ogni caso abbiamo a che fare con delle parabole, abbiamo

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, 0[\cup]y_2, +\infty[.$$

Possiamo allora tracciare il grafico di f (da cui si deduce anche l'andamento del segno). Per la verità i punti x_1 e y_2 non si distinguono nella figura, ma l'analisi fatta dimostra che ci sono. Nella figura è anche tracciata la retta di equazione $y = 2$, che interseca il grafico di f esattamente due volte. Ciò è conseguenza delle monotonie che abbiamo trovato e del fatto che

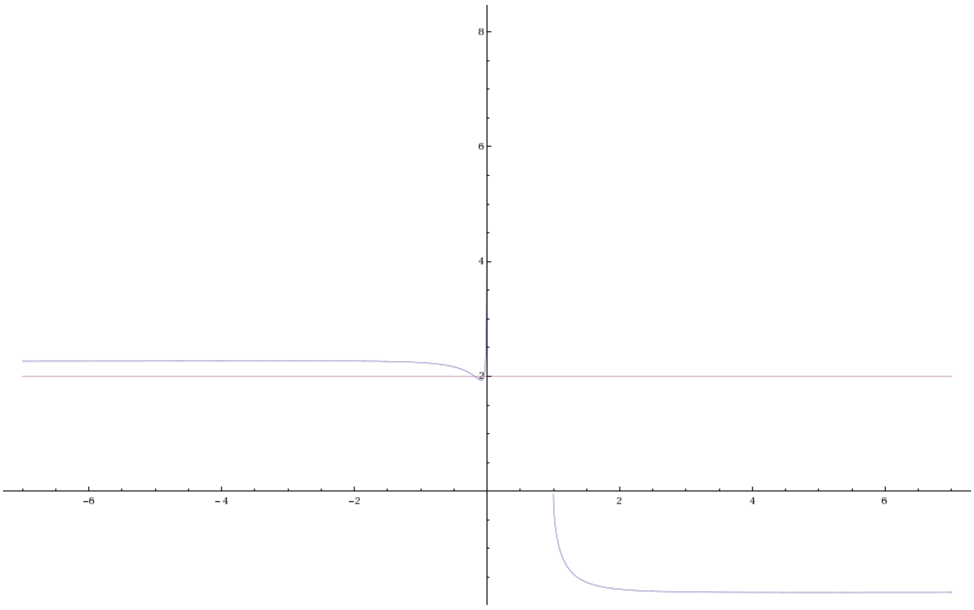
$$f(x_2) < 2 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}-1\right)}}{\left(1-2\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\right)} + \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)}} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)}}{\left(4-2\sqrt{2}\right)} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-\frac{5}{2}}{\sqrt{2}-\frac{3}{2}}} < 2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}-\frac{5}{2}} + \frac{(2-\sqrt{2})}{2}\sqrt{\sqrt{2}-\frac{5}{2}} < 4(2-\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\sqrt{2}-5\right)\sqrt{\sqrt{2}-\frac{5}{2}} < 4(2-\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}-\frac{3}{2}}$$

e l'ultima diseguaglianza vale perché $\frac{7}{2}\sqrt{2}-5 < 0 \Leftrightarrow 7\sqrt{2} < 10 \Leftrightarrow 49 \cdot 2 < 100$. Quest'ultima parte, in effetti era complicata (soprattutto senza la calcolatrice) – ne terrò



conto all'atto della correzione. □