# ANALISI 1 — LEZIONE 062

Titolo nota 09/12/2014

**Sostituzioni razionalizzanti**

① $\int \mathrm{Raz}(e^x)\,dx$

funzione razionale

② $\int \mathrm{Raz}(x, \sqrt{ax+b})\,dx$ o più in gen.

$$\int \mathrm{Raz}\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

③ $\int \mathrm{Raz}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

④ $\int \mathrm{Raz}(\sin x, \cos x)\,dx$

$\boxed{\text{Caso ③}}$ Tre metodi
→ basato sul coeff. di $x^2$
→ basato sulle radici di $ax^2+bx+c$
→ trigonometrico

$\boxed{\text{1° metodo}}$ Esempio 1 $\int \sqrt{x^2+3x+2}\,dx$

$$\int \frac{x^2+x^3+\sqrt{x^2+3x+2}}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3x+2}}$$

Sostituzione $\sqrt{x^2+3x+2} = x+t$ Ricavo $x$ in funzione di $t$

$$\cancel{x^2}+3x+2 = \cancel{x^2}+2xt+t^2$$

$\boxed{\text{In } x \text{ è di primo grado}}$

$$x(3-2t) = t^2-2$$

$$x = \frac{t^2-2}{3-2t} \qquad dx = \left(\frac{t^2-2}{3-2t}\right)' dt$$

Sostituendo diventa $\int \underbrace{\left(\frac{t^2-2}{3-2t}+t\right)}_{x+t} \underbrace{\left(\frac{t^2-2}{3-2t}\right)'}_{\text{Faccio il conto ed è razionale in } t} dt$

Esempio 2 $\int \sqrt{3x^2+2x+1}\,dx$

$$\sqrt{3x^2+2x+1} = \sqrt{3}\,x+t \quad ; \quad 3\cancel{x^2}+2x+1 = 3\cancel{x^2}+2\sqrt{3}\,xt+t^2$$

È di 1° grado in $x$

Fatto generale Se l'integrale contiene $\sqrt{ax^2+bx+c}$, la sostituzione razionalizzante è (una)

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t}$$

Funziona se $a>0$.

$\boxed{2^\circ \text{ metodo}}$ Esempio 3 $\int \sqrt{x^2+3x+2}\,dx$

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$$

Scelgo a caso uno dei 2 fattori, diciamo $x+2$

Sostituzione : $\sqrt{x^2+3x+2} = t\,(x+2)$

Provo a ricavare $x$, facendo il quadrato :

$$(x+1)\cancel{(x+2)} = t^2\,(x+2)^{\cancel{2}}$$

Ancora una volta, è di 1° grado in $x$ : $x+1 = t^2x+2t^2$

$$x(1-t^2) = 2t^2-1 \qquad x = \frac{2t^2-1}{1-t^2} \qquad dx = \left(\frac{2t^2-1}{1-t^2}\right)' dt$$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2+3x+2}\,dx = \int \underbrace{t\left(\frac{2t^2-1}{1-t^2}+2\right)}_{t\,(x+2)} \left(\frac{2t^2-1}{1-t^2}\right)' dt$$

e da qui si chiude.

— o — o —

Fatto generale Se le radici di $ax^2+bx+c$ sono $\lambda$ e $\mu$, allora una sostituzione che funziona è

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = t\,(x-\lambda)}$$

oppure $t\,(x-\mu)$

Funziona quando le radici ci sono, cioè quando $\Delta > 0$

Tabellina

| | $a>0$ | $a<0$ |
|---|---|---|
| $\Delta>0$ | 1° metodo<br>2° metodo | 2° metodo |
| $\Delta<0$ | 1° metodo | ? |

Il caso con $\Delta<0$ e $a<0$: il polinomio è sempre $<0$, quindi la sua radice quadrata non ha senso, quindi non ci poniamo il problema della primitiva

$\boxed{3° \text{ metodo}}$ Fatto generale: ogni polinomio di 2° grado si può scrivere in una delle seguenti 2 forme

$$\alpha + (\beta x + \gamma)^2 \quad \rightsquigarrow \text{ diventa } \quad 1+x^2$$

$$\alpha - (\beta x + \gamma)^2 \quad \rightsquigarrow \text{ diventa } \quad 1-x^2$$

Quindi basta saper fare $\int \sqrt{1+x^2}\,dx \qquad \int \sqrt{1-x^2}\,dx$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ si può fare con il 2° metodo oppure con la sostituzione trigonometrica $x = \sin t$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \quad \text{e qui si fa}$$

$\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ si può fare con il 1° metodo oppure con la sostituzione $x = \sinh t$

$$= \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t\,dt = \int \cosh^2 t\,dt \quad \text{e qui si fa}$$

→ per parti con grande ritorno

→ usando formula per $\cosh(2t)$

→ usando la definizione di $\cosh t$ in termini di $e^t$ e $e^{-t}$

— o — o —

$\boxed{\text{Caso } ④}$ Per funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$ è usare le formule parametriche della trigonometria

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

dove $t = \tan\frac{x}{2}$, da cui $\frac{x}{2} = \arctan t$ $\quad x = 2\arctan t$

e quindi $\boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt}$

Esempio 4 $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1+t^2}{2t}}_{\text{uso formula}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt$

$$= \log|t| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

Ci sono anche altre strade ...

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

$\cos x = t$

$-\sin x\,dx = dt$

$= -\int \frac{dt}{1-t^2}$ e da qui si chiude facilmente

Fatto generale : allo stesso modo (senza passare dalle formule parametriche) si fanno

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin^k x}\,dx} \qquad \boxed{\int \frac{1}{\cos^k x}\,dx}$$

Esempio 5 $\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\,dx$

$y = \sin x$

$dy = \cos x\,dx$

$= \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$ ... e questo si fa scrivendo

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{d}{dt}\,\frac{Ct+D}{1-t^2} \quad \ldots$$

**Esempio 6** $\int \arcsin x \, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arcsin x} \, dx$

$$= \underset{F}{x} \, \underset{G}{\arcsin x} - \int \underset{F}{x} \, \underset{g}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

si può fare con il 2° o 3° metodo

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

(Derivare per verifica)

In alternativa

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \qquad y = 1-x^2 \qquad dy = -2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} = -\sqrt{1-x^2}$$

Alternativa: $x = \sin t$ all'inizio $\qquad dx = \cos t \, dt$

$\int \arcsin x \, dx = \int t \cdot \cos t \, dt$ e per parti si chiude

**Esempio 7** $\int \frac{1}{\sin^3 t \cos^3 t} \, dt$

1° metodo: formule parametriche

2° metodo: Precorso $\frac{1}{\sin^3 t \cos^3 t} = \frac{8}{\sin^3 (2t)}$

3° metodo $\frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t \cos^4 t} = \frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t \, (1-\sin^2 t)^2} \qquad y = \sin^2 t$

diventa $\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2 (1-y)^2}$ e da qui si chiude.

4° modo Provare a moltiplicare per $\sin^3 t \cos t$ ...

— o — o —

Aggiunto dopo video: provare a moltiplicare per $\cos^2 x + \sin^2 x$ e per $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2$ (vedi lez. 2011/12)