ANALISI MAT. I – LEZIONE 58

Titolo nota 12/11/2008

<u>Esercizio</u>. Calcolare $\max\{n^3 e^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

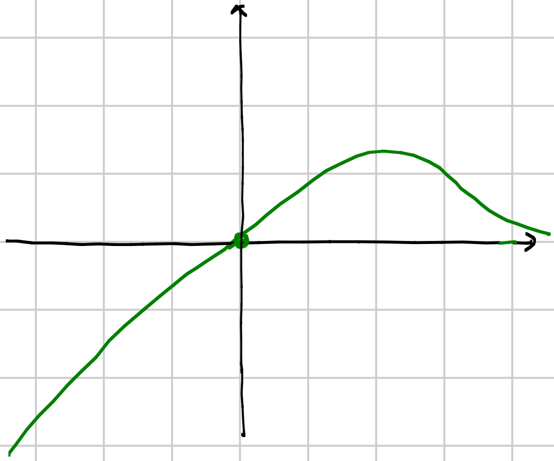
$\max\{x^3 e^{-x} : x \geq 0\}$

$f(x) = x^3 e^{-x}$ $\rightarrow$ studio globale (basta per $x \geq 0$)

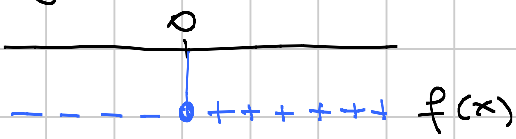
Definita e continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

No simmetrie

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ($-\infty \cdot e^{+\infty}$)

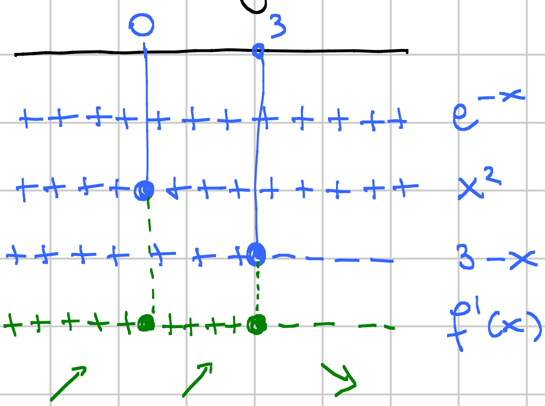


Segno di $f(x)$ dipende dal segno di x^3

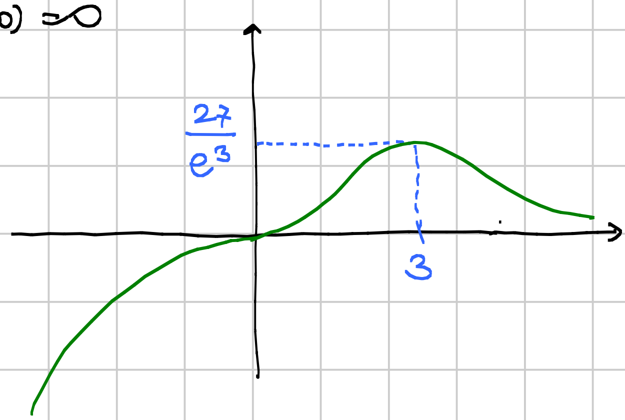


Studio di $f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x}(3-x)$.

Studio il segno



Il grafico precedente non tiene conto che $f'(0) = 0$



Per prevedere il flesso a tan. orizz. ascendente in $x=0$ bastava osservare che

$f(x) = \boxed{x^3} + o(x^3)$

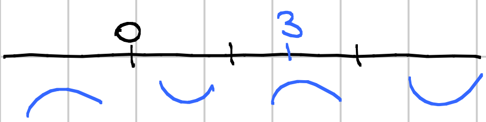
comportamento vicino a $x=0$

Ora sappiamo che

$\max\{x^3 e^{-x} : x \geq 0\} = \frac{27}{e^3}$

$=$ " " $: x \in \mathbb{R}\} =$ "

Previsioni sulla convessità / concavità:

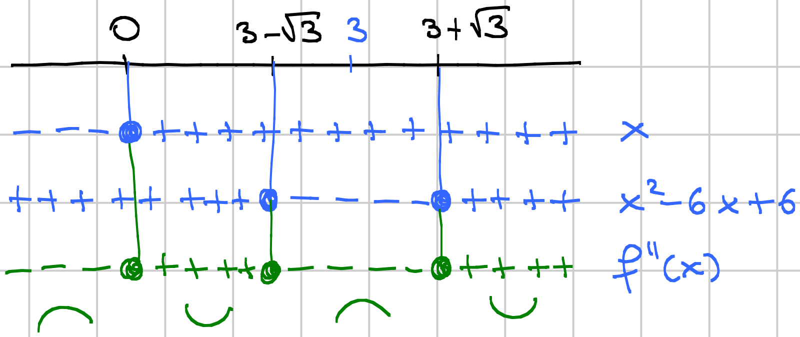


Studio $f''(x)$ per conferma

$$f'(x) = x^2 e^{-x}(3-x)$$
$$f''(x) = 2x e^{-x}(3-x) - x^2 e^{-x}(3-x) - x^2 e^{-x}$$
$$= x e^{-x}(6-2x-3x+x^2-x)$$
$$= x\, e^{-x}(6-6x+x^2)$$

$f''(x)=0 \iff x=0$ oppure $x^2-6x+6=0$ $\quad x_{1,2} = +3 \pm \sqrt{3}$

Studio il segno di $f''(x)$. Tralasciando e^{-x} che è >0 abbiamo

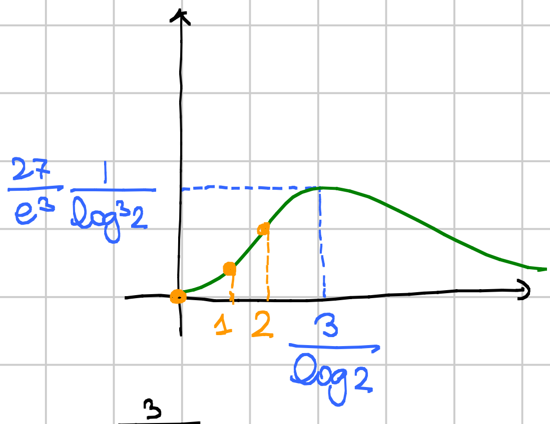


Abbiamo effettivamente 3 p.ti di flesso come previsto.

$\max\{n^3 e^{-n} : n \in \mathbb{N}\} = \dfrac{27}{e^3}$ perché il p.to di max è $x = 3 \in \mathbb{N}$.

—o—o—

<u>Esempio 2</u> $\quad \max\{n^3 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ studio $f(x) = x^3 2^{-x}$



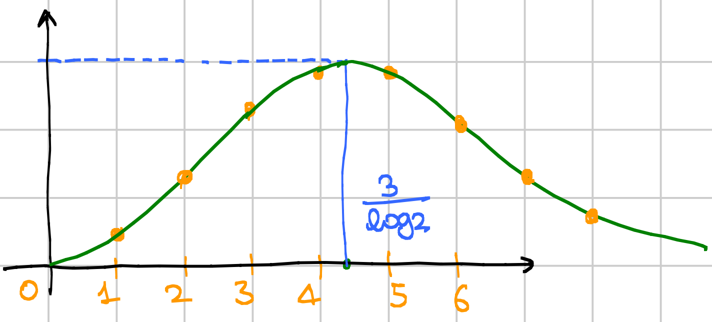
Calcolo il p.to di max:

$$f'(x) = 3x^2 2^{-x} - x^3 2^{-x}\log 2$$
$$= x^2 2^{-x}(3 - x\log 2)$$

La soluzione positiva di $f'(x)=0$ è

$$x = \frac{3}{\log 2}$$

$$\max\{x^3 2^{-x} : x \in \mathbb{R}\} = f\left(\frac{3}{\log 2}\right) = \frac{27}{\log^3 2}\, 2^{-\frac{3}{\log 2}}$$
$$= \frac{27}{\log^3 2}\, e^{-\frac{3}{\cancel{\log 2}}\cdot\cancel{\log 2}} = \frac{27}{e^3}\,\frac{1}{\log^3 2}$$



$\mathrm{Max}\{n^3 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ = il + alto valore tra i puntini

Per il max su n se la giocano $n=4$ e $n=5$, cioè i 2 valori naturali + vicini al p.to di max sui reali.

$f(5)$ batte tutti i successivi

$f(4)$ " " " precedenti

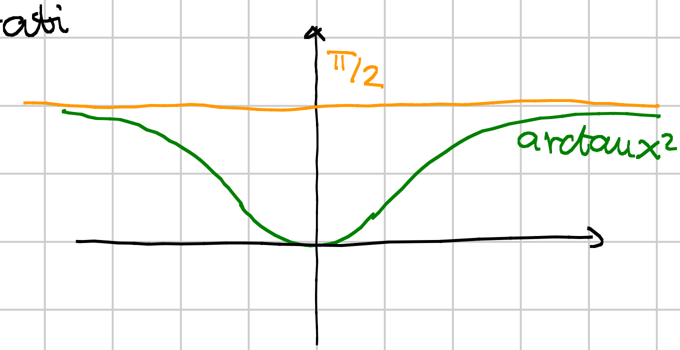
$$f(4) = \frac{64}{16} = 4 \qquad f(5) = \frac{125}{32} < \frac{128}{32} = 4$$

Quindi max $= 4$, P.to di max: $n = 4$.

—o—o—o—

Esempio 3 Risolvere la disequazione $\arctan x^2 < x$.

Provare a fare i 2 grafici comparati

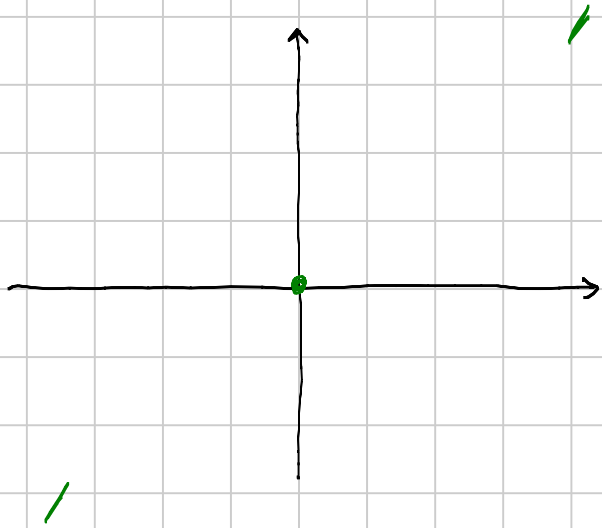


Studio $f(x) = x - \arctan x^2$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Simmetrie: NO.



$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4}$$

$$= \frac{1-2x+x^4}{1+x^4}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno di x^4-2x+1. Il problema è che non lo so studiare.

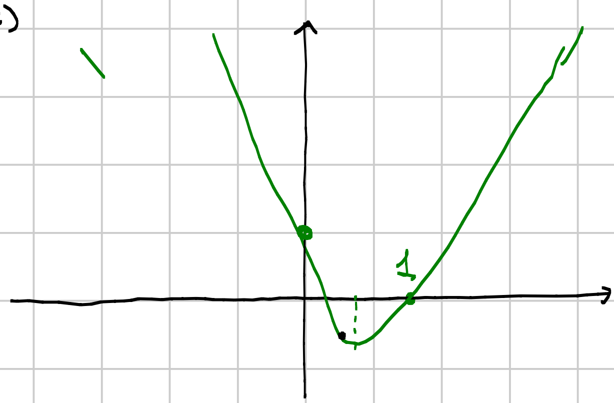
Pongo $g(x) = x^4-2x+1$ e studio $g(x)$

$$g'(x) = 4x^3 - 2 = 2(2x^3-1)$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

$- - - - - - \bullet + + + + + + + + +$ $g'(x)$

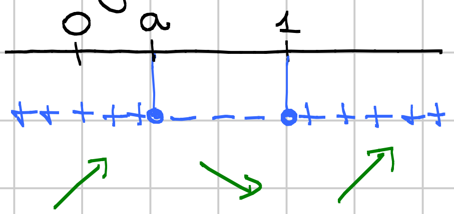
$\searrow \quad \nearrow$



$g(x)$ ha minimo per $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ e tale minimo vale

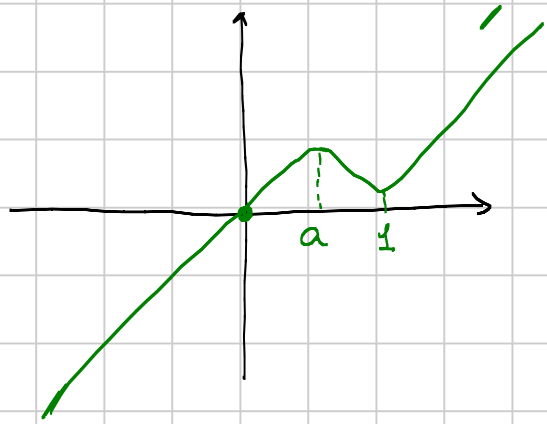
$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}} + 1 < 0$$

Quindi $g(x)$ si annulla in $x = 1$ e in un altro valore $a < 1$



$g(x)$ è uguale per $f'(x)$

$f(x)$



Nota bene: a non riesco a trovarlo, ma il segno di $f(x)$ è deciso dal valore $f(1)$

$$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

Quindi $f(x) \geq 0 \iff x \geq 0$