Combinatoria – Test Senior

Tempo concesso: 120 minuti

Valutazione: risposta errata 0 punti, mancante +2, esatta +5

---

1. Determinare quanti sono gli anagrammi (anche senza senso) della parola TATTILI.
   (**A**) 420 (**B**) 840 (**C**) 2187 (**D**) 5040

2. Determinare quanti sono i divisori positivi di
   $$69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1.$$
   (**A**) 125 (**B**) 216 (**C**) 343 (**D**) 512

3. Quattro persone scelgono a caso tra cinque alberghi, indipendentemente l'uno dall'altro. Determinare la probabilità che scelgano tutti alberghi diversi.
   (**A**) 24/125 (**B**) 1/24 (**C**) 15/128 (**D**) 5/512

4. Ad uno stage partecipano 20 studenti, di cui 15 sono bravi in algebra, 14 sono bravi in geometria e 13 sono bravi in teoria dei numeri. Determinare il *minimo* numero di studenti che sono bravi in tutte e tre le materie.
   (**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 7

5. Determinare il coefficiente di x^3y^2 nello sviluppo di $(x + y + 2)^7$.
   (**A**) 210 (**B**) 420 (**C**) 840 (**D**) 1680

6. Un cerchio è suddiviso in n settori circolari ($n \geq 4$), contrassegnati da numeri reali $x_1, \ldots, x_n$ la cui media aritmetica è 8. Determinare quante delle seguenti affermazioni
   - "esiste almeno un settore con un numero ≥ 8";
   - "esistono almeno 3 settori distinti contrassegnati da numeri la cui somma è ≥ 24";
   - "almeno 2 settori *consecutivi* sono contrassegnati da numeri la cui somma è ≥ 16";

   sono necessariamente vere.
   (**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3

7. Determinare quante sono le funzioni $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{10, 11, 12\}$ tali che $f(1) \neq f(2)$.
   (**A**) 36 (**B**) 122 (**C**) 162 (**D**) 240

8. Determinare quanti tra i 94 elementi della 93-esima riga del triangolo di Tartaglia sono divisibili per 31.

   (**A**) 89 (**B**) 90 (**C**) 91 (**D**) 92

9. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola STAGISTI che iniziano con una S e terminano con una I.

   (**A**) 360 (**B**) 720 (**C**) 1260 (**D**) 5040

10. Determinare quanti sono i sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, 10\}$ composti da 5 elementi, in cui il secondo più piccolo è 4.

    (**A**) 60 (**B**) 126 (**C**) 360 (**D**) 648

11. Ai quarti di finale di una competizione internazionale partecipano otto squadre, di cui tre italiane. Se i quattro accoppiamenti vengono sorteggiati, determinare la probabilità che le italiane non si incontrino nei quarti.

    (**A**) 3/7 (**B**) 4/7 (**C**) 2/21 (**D**) 125/343

12. Determinare quante sono le colonne del totocalcio (13 partite, 3 simboli possibili) che contengono esattamente due simboli.

    (**A**) 2^{13} (**B**) $3 \cdot 2^{13}$ (**C**) $3 \cdot (2^{13} - 1)$ (**D**) $3 \cdot (2^{13} - 2)$

13. Si tirano 10 dadi normali. Determinare *quale* dei seguenti numeri ha la maggior probabilità di essere la somma dei 10 punteggi ottenuti.

    (**A**) 29 (**B**) 32 (**C**) 37 (**D**) 41

14. Determinare quanti sono gli interi positivi, minori o uguali a 2100, che non sono divisibili né per 3, né per 5, né per 7.

    (**A**) 680 (**B**) 960 (**C**) 980 (**D**) 1140

15. Determinare con quanti zeri termina la scrittura di 2003! in base 12 (si intende che 2003 è scritto in base 10).

    (**A**) 180 (**B**) 664 (**C**) 991 (**D**) 997

16. In una gara matematica vengono assegnati 6 problemi, ciascuno dei quali è valutato con un intero compreso tra 0 e 7. Al termine della gara, un concorrente ha realizzato in tutto solo 7 punti. Determinare in quanti modi può aver ottenuto questo punteggio totale.

    (**A**) 792 (**B**) 924 (**C**) 1287 (**D**) 1716

17. La somma

$$\sum_{k=1}^{2005} \binom{2005}{k} (-2)^k$$

è uguale a

(**A**) -2 (**B**) -1 (**C**) 0 (**D**) 1

18. Scegliamo quattro carte da un mazzo di 52 (13 per ogni colore). Determinare quale delle seguenti distribuzioni dei colori è la più probabile (ad esempio, con 3-1-0-0 intendiamo 3 carte di un qualunque colore ed 1 carta di un qualunque altro colore).

(**A**) 1-1-1-1 (**B**) 2-1-1-0 (**C**) 2-2-0-0 (**D**) 3-1-0-0

19. I cinque giocatori di una squadra di basket hanno ciascuno la maglietta con il proprio nome stampato. Le 5 magliette sono state trasportate all'interno di una borsa. Se prendono dalla borsa le 5 magliette a caso, determinare la probabilità che almeno uno prenda la propria maglietta.

(**A**) 11/30 (**B**) 19/30 (**C**) 4/5 (**D**) 2/15

20. In un parlamento sono state costituite varie commissioni. Ogni commissione è composta da 13 parlamentari, e ogni parlamentare fa parte di esattamente 11 commissioni. Determinare *quante* delle seguenti affermazioni

    - "il numero dei parlamentari è multiplo di 13";
    - "il numero delle commissioni è multiplo di 11";
    - "il numero dei parlamentari è maggiore del numero delle commissioni";

    sono necessariamente vere.

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3

21. Determinare quante sono le diagonali interne di un dodecaedro (una diagonale interna è un segmento che congiunge due vertici non appartenenti ad una stessa faccia).

(**A**) 70 (**B**) 90 (**C**) 100 (**D**) 150

22. Ad una scacchiera 13×15 eliminiamo la quarta casella della riga superiore. Determinare il massimo numero di piastrelle 2×1 che possiamo piazzare sulla scacchiera rispettando la quadrettatura ed evitando sovrapposizioni.

(**A**) 95 (**B**) 96 (**C**) 97 (**D**) 98

23. Sia X un insieme di n elementi e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X. Determinare

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} |A|.$$

(**A**) $n2^{n-1}$ (**B**) $n2^n$ (**C**) 2^{n^2} (**D**) 2^{2^n}

24. Determinare il minimo ed il massimo numero cromatico di un grafo connesso con n vertici.

(**A**) Minimo: 2; Massimo: 4

(**B**) Minimo: 2; Massimo: n

(**C**) Minimo: 2; Massimo: $n(n-1)/2$

(**D**) Minimo: n; Massimo: n

25. Abbiamo 3 urne con dentro varie palline. Sono possibili due mosse: possiamo scegliere due urne, prendere una pallina da ognuna e mettere le due palline nella terza urna, oppure possiamo prendere due palline da un'urna e metterne una in ciascuna delle altre due urne.

Detti a, b, c i numeri di palline nelle 3 urne, consideriamo le seguenti 4 quantità

$$a+b+c, \qquad a+b+c \pmod 3, \qquad a+b \pmod 3, \qquad a-b \pmod 3.$$

Determinare *quante* di esse sono invarianti.

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4

26. Un ciclo rappresenta una permutazione pari

(**A**) mai

(**B**) se e solo se coinvolge un numero dispari di elementi

(**C**) se e solo se coinvolge un numero pari di elementi

(**D**) sempre

27. Consideriamo le seguenti affermazioni relative ad un grafo:

- "il numero dei vertici è pari e da ogni vertice parte un numero pari di lati";
- "il numero dei vertici è pari e da ogni vertice parte un numero dispari di lati";
- "il numero dei vertici è dispari e da ogni vertice parte un numero pari di lati";
- "il numero dei vertici è dispari e da ogni vertice parte un numero dispari di lati".

Determinare *quante* di esse sono impossibili.

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3

28. In una popolazione il 40% degli individui è obeso, il 30% mangia 1 Kg di cioccolato al giorno e di questi l'80% sono obesi.

    Determinare la probabilità che un obeso mangi 1 Kg di cioccolato al giorno.

    (**A**) 60% (**B**) 70% (**C**) 75% (**D**) 80%

29. Si vuole piastrellare una scacchiera 10×10 usando 33 piastrelle 3×1. In questo modo rimarrà scoperta una casella. Determinare quante delle 100 caselle della scacchiera possono essere la casella che alla fine risulterà scoperta.

    (**A**) 4 (**B**) 12 (**C**) 16 (**D**) 34

30. Consideriamo le seguenti tabelle $m \times n$:

    2400×5, 2400×5555, 4002×4002, 4004×3003.

    Determinare quali di esse possono essere ricoperte usando piastrelle 3×4.

    (**A**) solo la quarta

    (**B**) solo la terza e la quarta

    (**C**) solo la seconda e la quarta

    (**D**) tutte tranne la prima