[B1] Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i punti $(1,1,1)$, $(2,2,2)$ e $(1,2,3)$ dello spazio.
A B C

$B-A = (1,1,1)$ $C-A = (0,1,2)$

Formula misteriosa
$$\begin{matrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \rightsquigarrow 1, -2, 1$$
a, b, c del piano

$$\boxed{x - 2y + z = 0}$$
VERIFICA!

sostituendo i p.ti

— o — o —

[B2] Determinare la forma canonica di Jordan complessa della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1+7i & 0 \\ 0 & 1-7i \end{pmatrix}$$

Metodo elegante: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ è la Jordan reale corrispondente a $\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$

Metodo bovino: basta calcolare gli autovalori della matrice data, possibilmente senza sbagliarli.

— o — o —

[L1] Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ 3x - z = 2 \\ y + 4z = b \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b il sistema non ammette soluzioni.

(b) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b il sistema ammette infinite soluzioni, ed in tal caso determinare esplicitamente le soluzioni stesse.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & b \end{array}\right)$$

A = matrice dei coeff.

A' = matrice completa

$\operatorname{Det} A = 6 - 12a + 1 = 0 \iff a = \frac{7}{12}$

- se $a \neq \frac{7}{12}$ e b qualunque si ha rango(A) = rango$(A') = 3$, quindi soluzione unica.

- Se $a = \frac{7}{12}$, osservando che la 1ª e 3ª riga di A sono lin. indip., studiamo il rango di A' calcolando

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & b \end{pmatrix} = -b + 12 - 6b - 8 = 0 \iff b = \frac{4}{7} \text{ quindi}$$

→ se $\boxed{a = \frac{7}{12} \text{ e } b \neq \frac{4}{7}}$, allora rango$(A) = 2$ e rango$(A)' = 3$ quindi $\boxed{\text{nessuna soluzione}}$

→ se $\boxed{a = \frac{7}{12} \text{ e } b = \frac{4}{7}}$, allora rango$(A)$ = rango$(A') = 2$ quindi $\boxed{\text{infinite soluzioni}}$ (1 parametro)

Risolvendo con Gauss, dopo aver eliminato le frazioni:

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 24 & 12 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 28 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 12 & 7 & 24 & 12 \\ 0 & 7 & 28 & 4 \\ 0 & 7 & 28 & 4 \end{pmatrix}$$

$z = t$

$7y + 28t = 4 \rightsquigarrow y = \frac{4}{7} - 4t$

$12x + 4 - 28t + 24t = 12$

$x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t, \frac{4}{7} - 4t, t\right) = \boxed{\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, 0\right) + t\left(1, -12, 3\right)}$$

— o — o —

[L2] Consideriamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che B è definita positiva.

(b) Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito da tutti i vettori ortogonali a $(1, 1, 1)$ rispetto al prodotto scalare definito dalla matrice B.

(a) Sylvester 1-2-3 : $\text{Det}_{1\times1} = 1$

$\text{Det}_{2\times2} = 1$

$\text{Det}_{3\times3} = 6-3-1 = 2$

$\underbrace{+ \quad +}_{P} \underbrace{\quad +}_{P} \underbrace{\quad +}_{P}$

$n_+ = 3, \; n_- = n_0 = 0$

(b)

$$(1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2, 4, 4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{2x+4y+4z=0}_{\text{eq. cartesiana sottospazio}}$$

Una possibile base è $\boxed{(-2,1,0), (-2,0,1)}$.

— o — o —